Escaleras deslizantes flexibles: Un repaso actualizado y específico al puente entre Geometría Dinámica y Álgebra Computacional

Francisco Botana†, José L. Valcarce‡
† Depto. de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo
‡ Departamento de Matemáticas, IES Pontepedriña, Santiago
fbotana@uvigo.es ; ppvalcarce@gmail.com

Abstract

We use a recent generalization of the slidding ladder to illustrate the advantages of combining dynamic geometry and computer algebra systems. The envelopes of ladders of variable length are studied within the computer algebra system Sage: we use GeoGebra for obtaining an graphical approach to these envelopes, and Singular for performing a simple elimination process that returns the envelope equation.

1 Introducción

Tomando como pretexto una reciente generalización, debida a Apostol y Mnatsakanian [1], de la bien conocida escalera deslizante, la escalera flexible, se hace un breve repaso del cálculo de la primera en diferentes sistemas de geometría y cálculo simbólico. Se calculan las envolventes para escaleras flexibles gobernadas por variadas curvas algebraicas. Las envolventes se obtienen mediante dos aproximaciones: i) utilizando GDI, un entorno de geometría simbólico–dinámica en el que el proceso es transparente para el usuario, y ii) remotamente, a través del *notebook* de Sage, donde conviven GeoGebra y Singular.

Las aproximaciones tomadas subrayan una tarea por completar en el ámbito del software matemático: la deseada fusión entre los paradigmas de la geometría dinámica y la demostración automática en geometría. En esta tarea el profesor Roanes y su equipo han desempeñado un papel muy relevante dentro de la Matemática española.

2 La escalera deslizante

Consideremos una escalera en posición vertical apoyada contra una pared. Si la escalera empieza a caer de manera que su extremo superior se desliza sobre la pared y el extremo inferior lo hace sobre el suelo, ¿qué trayectoria describe el punto medio de la escalera? Si bien la experimentación puramente mental del problema conduce frecuentemente a conjeturas erróneas, el usuario con acceso a un programa de geometría dinámica obtendrá fácilmente que la trayectoria buscada parece ser un cuarto de circunferencia. La configuración más frecuente consiste en definir un segmento desde el origen hasta $(a, 0)$, construir un punto sobre el segmento, que será el pie de la escalera, y, con ayuda del compás, trazar la circunferencia de centro el pie y radio a. El punto de corte superior de esta circunferencia con el eje Y será la cima de la escalera. Aquí variaremos ligeramente la construcción, ilustrada en la Figura 1. Partiendo de un cuarto de circunferencia c y un punto C sobre él, los extremos de la escalera, F y G, son sus proyecciones sobre los ejes, y el punto H es el punto medio de la escalera. Cuando C recorre el cuarto de circunferencia, la escalera se desliza entre la pared (eje Y) y el suelo (eje X), manteniendo su longitud constante, y el punto H describe un cuarto de circunferencia.

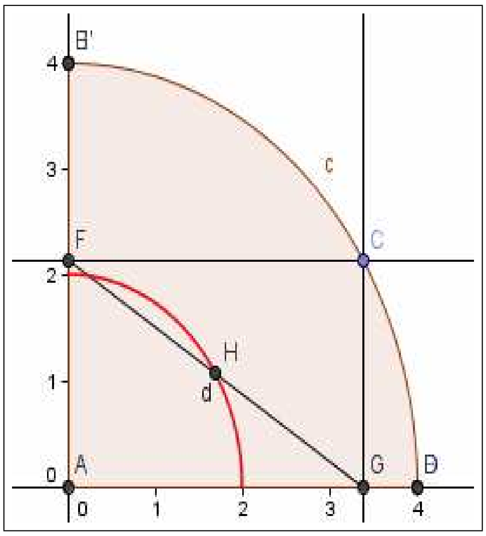

Figura 1: La escalera deslizante en un entorno genérico de geometría dinámica.

La pregunta inmediata entraña considerar otro punto distinto del medio. La trayectoria es en este caso elíptica, como sugiere la traza del punto en un programa de geometría dinámica (aunque posiblemente las respuestas en una clase se distribuirían entre parábola y elipse). Si usamos Cabri y pedimos la ecuación del lugar podremos comprobar (Figura 2) que efectivamente es una elipse. Pero este procedimiento encierra una mala práctica y, en ocasiones, un peligro: Cabri no garantiza la exactitud de sus cálculos al devolver ecuaciones de objetos construidos, debido al método aproximado que emplea para obtenerlas.

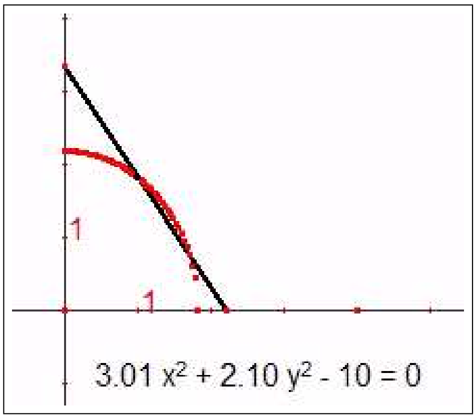

Figura 2: El lugar de un punto cualquiera de la escalera deslizante con Cabri.

Si queremos certeza en cuanto a la exactitud de la ecuación del lugar geométrico podemos recurrir a GDI [2], un prototipo de geometría dinámica que utiliza métodos correctos para calcular ecuaciones de lugares. Utilizando este entorno la especificación del problema cambia ligeramente, pues no se construye explícitamente el punto H sino que se describen las condiciones que debe cumplir (téngase en cuenta que esta vía permite calcular lugares geométricos de puntos no construibles). Si, por ejemplo, H divide al segmento FG en tres partes iguales, se introducen como condiciones definitorias del lugar

- Aligned(H, F, G)
- distance$(H, F)*3 =$ distance(G, F)

La respuesta relativa a la ecuación del lugar del punto H se muestra en la Figura 3. El resultado, a primera vista sorprendente, no lo es si se piensa que para cada posición de C en la circunferencia hay dos puntos que verifican las condiciones dadas: uno dentro del segmento y otro fuera de él, sobre la recta soporte. GDI, con vocación de exactitud y generalidad, muestra gráficamente ambas elipses (Figura 4), ya que incorpora características que permiten un paso más allá del tratamiento puramente

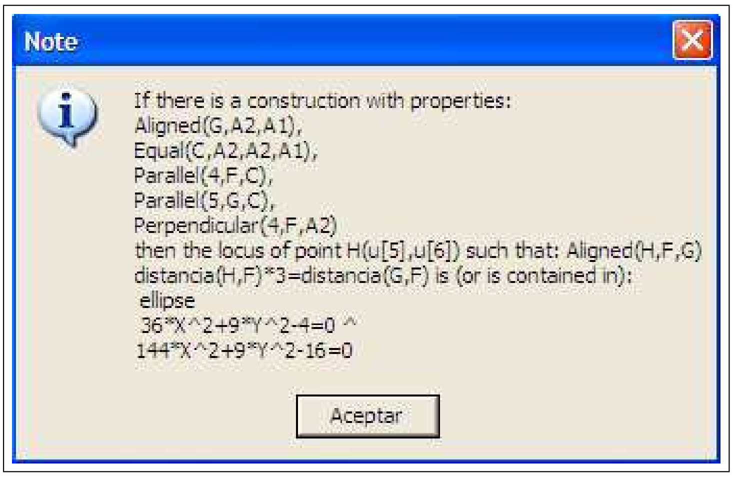

Figura 3: Ecuación dada por GDI para el lugar del punto H.

algebraico de las construcciones: en este caso la representación gráfica correcta se logra añadiendo como tercera condición a las que definen el lugar

- OnSegment(H, F, G).

Sería ingenuo y pretencioso por nuestra parte sugerir la sustitución de herramientas consolidadas como, por ejemplo, Cabri por un prototipo como GDI, a pesar de su mayor eficiencia en tareas como la que aquí se discute. Con el ánimo de superar limitaciones y garantizar resultados correctos a programas estándar de geometría dinámica, se desarrolló LADucation [3], una herramienta de acceso remoto para el procesamiento simbólico de tareas geométricas. LADucation acepta construcciones en Cabri, The Geometer's Sketchpad o Cinderella relativas a lugares geométricos y demostraciones y devuelve conclusiones matemáticamente verdaderas. Para la construcción Cabri arriba mencionada la respuesta de LADucation es a primera vista desconcertante, "*El lugar es todo el plano (o contiene un conjunto abierto 2–dimensional)*".

Una mirada atenta a la construcción hará comprensible la respuesta: si el usuario se limitó a crear un punto sobre la escalera, éste no es uno fijo sobre el segmento, sino que puede ser cualquiera. Debido a ello, la trayectoria que describe es realmente una parte bidimensional del plano, que puede visualizarse activando la traza de la escalera completa (Figura 5). El lector atento habrá imaginado la astroide, generada como curva tangente en cada uno de sus puntos a una de las trayectorias de los puntos que

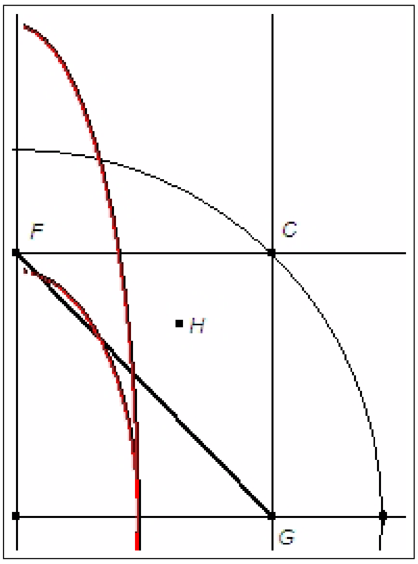

Figura 4: Dos elipses posibles para H en GDI.

forman la escalera. En otras palabras, la astroide es la envolvente de las rectas que contienen a la escalera en cada posible posición. Distintos programas de geometría dinámica permiten el cálculo de envolventes de familias de rectas o segmentos que dependen de otro objeto, y lo hacen usualmente mediante la misma herramienta que para los lugares geométricos. Por ejemplo, Cinderella (Figura 6, izquierda)traza limpiamente la parte de la astroide en el primer cuadrante a partir de la escalera deslizante, mientras que Cabri (Figura 6, derecha) sugiere la astroide como frontera de todas las elipses trazadas por los puntos de la escalera. Además, Cabri devuelve la ecuación (¡incorrecta!) del lugar obtenido refiriéndose a la astroide y no a todo lo que identifica como lugar geométrico.

3 La ecuación de la envolvente de una familia de curvas

Si $F(x, y, \alpha) = 0$ es una familia de curvas que dependen de un parámetro α, se define la envolvente de la familia F como sigue: Si se reemplaza un α dado por $\alpha + \Delta\alpha$ en la ecuación de la familia $F(x, y, \alpha) = 0$, obtenemos una nueva curva implícitamente definida por $F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$. El conjunto de puntos que pertenecen a ambas

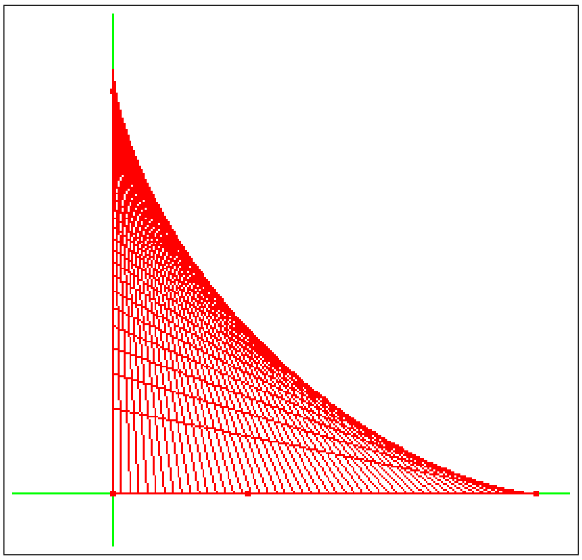

Figura 5: Todas las posibles posiciones de un punto cualquiera de la escalera cuando ésta se desliza.

curvas satisface

$$F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha) = 0.$$

Si F es derivable con respecto a α y si esta variable α puede ser eliminada en el sistema

$$\begin{aligned} F(x, y, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

la curva resultante implícitamente definida por $f(x, y) = 0$ se llama la envolvente de la familia de curvas $F(x, y, \alpha) = 0$.

Si la familia de curvas está definida biparamétricamente por $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, donde los parámetros están relacionados por $g(\alpha, \beta) = 0$, la eliminación de α y β se hace en el sistema

$$\begin{aligned} F(x, y, \alpha, \beta) &= 0 \\ g(\alpha, \beta) &= 0 \\ \frac{\partial F(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \frac{\partial F(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

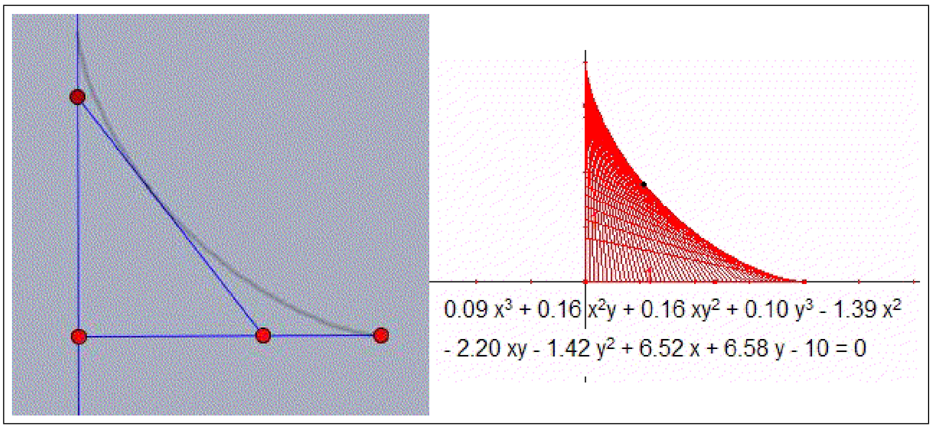

Figura 6: Envolvente de la escalera deslizante en Cinderella (izq.) y Cabri.

donde F y g son diferenciables.

4 La escalera flexible

La escalera deslizante tiene un tamaño constante e igual al radio de la circunferencia que sirve de guía para su construcción, porque el punto C sobre la que se construye pertenece a una circunferencia. ¿Qué sucede si C recorre una elipse, una parábola o cualquier curva? En este caso la longitud de la escalera no es constante y Apostol y Mnatsakanian definen la escalera flexible.

Veamos en detalle el caso en que la curva que recorre C es la hipérbola rectangular $y = \frac{1}{x}$. Al estar la curva recorrida por C definida por dos parámetros se trata de eliminarlos en el sistema

$$\begin{aligned} \beta x + \alpha y - \alpha\beta &= 0 \\ \alpha\beta - 1 &= 0 \\ (y-\beta)\alpha - (x-\alpha)\beta &= 0, \end{aligned}$$

GDI automatiza la obtención de esta envolvente: seleccionando la escalera flexible y el punto C, llama, de manera transparente para el usuario, a CoCoA donde se hace la eliminación. CoCoA devuelve Ideal$(2x * y - 1/2)$, que GDI interpreta como la hipérbola rectangular $4xy - 1 = 0$. Nótese que puesto que en GDI todos los elementos en una construcción son algebraicamente conocidos, la curva recorrida por C puede ser cualquier línea construible en el sistema. La Figura 7 muestra la envolvente de una escalera flexible gobernada por la parábola de ecuación $31329 - 2500x^2 + 17700y$ obtenida como un lugar geométrico.

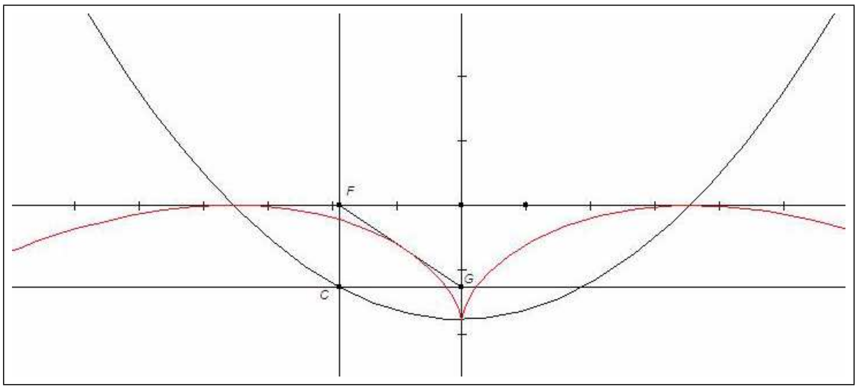

Figura 7: La envolvente cuando la curva que gobierna es un lugar geométrico

Para el estudio de las envolventes de escaleras flexibles puede optarse por software libre más accesible. Usando el *notebook* de Sage [5] mostramos como este sistema permite albergar amigablemente herramientas de geometría dinámica y recursos de cálculo simbólico. En la hoja de trabajo “Escalera Flexible” [4] ilustramos cómo la incorporación de applets en el notebook y los interfaces de Sage permiten estudiar las escaleras flexibles de manera sencilla.

La estructura de la hoja de trabajo es simple: la primera celdilla descarga GeoGebra desde su sitio web y una construcción de los autores (Figura 8). En GeoGebra el usuario puede construir cualquier escalera flexible gobernada por una función $y = g(x)$ y visualizar su envolvente activando su traza. Las celdillas siguientes usan el interfaz de Sage con Singular para llevar a cabo la eliminación. Se define el anillo de los polinomios en cuatro variables x, y, u, v sobre los racionales

```
R = singular.ring(0, '(u,v,x,y)', 'dp')
```

los polinomios f, g, h que definen el ideal I

```
I=singular.ideal(f,g,h)
```

y se eliminan los dos parámetros que definen la curva que gobierna la escalera flexible

```
singular.eliminate(I,'uv')
```

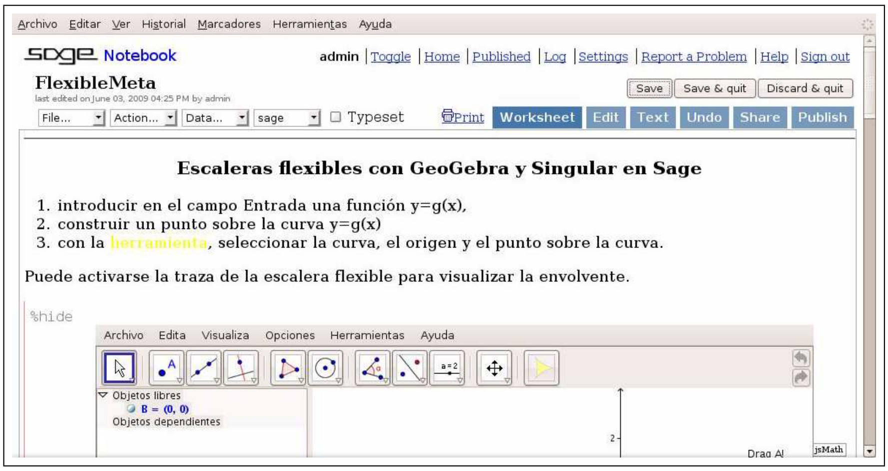

Figura 8: Inicio de la hoja de trabajo en el notebook de Sage

Nótese que si bien hay que evaluar todas las celdillas sólo se requiere la definición de g para realizar los cálculos. El polinomio devuelto por la eliminación es la envolvente de la escalera flexible. Finalmente, usando las rutinas de dibujo de Sage se representa la envolvente (Figura 9).

5 Conclusiones

La colaboración entre GeoGebra y Singular por medio de Sage facilita notablemente el estudio del problema presentado y, con seguridad, puede resolver muchos otros en los que la sola funcionalidad de los sistemas de geometrí dinámica y los de álgebra computacional no es suficiente cuando sus potencialidades no se utilizan conjuntamente. Pero este arreglo está lejos de constituir una completa integración entre ambos, que sólo se logrará cuando se disponga de un entorno de geometrí dinámica que incorpore en su núcleo las rutinas de álgebra computacional necesarias para llevar a cabo la deducción automática en geometría. GDI, prototipo que incorpora algunas de esas estrategias a través de CoCoA y Mathematica constituyó un primer paso para lograrlo. Esperamos que el modo en que aquí se ilustra la colaboración entre GeoGebra y Singular sea también un acicate para lograr la completa integración de ambos paradigmas.

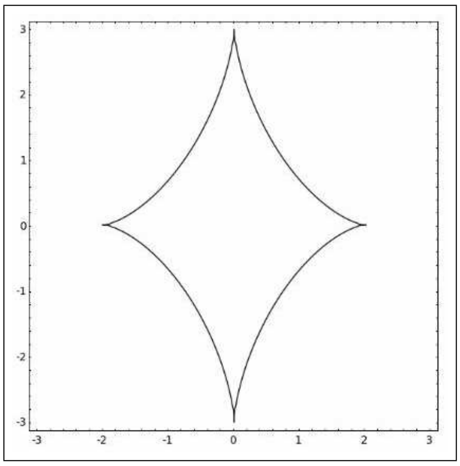

Figura 9: La envolvente de la escalera flexible gobernada por la elipse $(x/2)^2 + (y/3)^2 = 1$

Referencias

[1] T.M. Apostol, M.A. Mnatsakanian, A New Look at the So-Called Trammel of Archimedes, Am. Math. Month. 116(2) (2009) 115–133

[2] F. Botana, J.L. Valcarce, A software tool for the investigation of plane loci, Math. Comput. Simul. 61(2) (2003) 141–154

[3] http://nash.sip.ucm.es/LAD/LADucation.html

[4] https://kimba.mat.ucm.es:9000

[5] http://www.sagemath.org