Sobre el descubrimiento automático de diversas generalizaciones del Teorema de Steiner-Lehmus

Rafael Losada, Tomás Recio, José Luis Valcarce
IES de Pravia, Universidad de Cantabria, IES Pontepedriña

rafaelll@educastur.princast.es
tomas.recio@unican.es
jvalcarce@edu.xunta.es

Abstract

The Theorem of Steiner-Lehmus states that if a triangle has two (internal) angle-bisectors with the same length, then the triangle must be isosceles. Here we will deal with our attempts to provide, through automatic discovery tools, a more general statement regarding internal and external bisectors. The case of three (either internal or external) bisectors is also described.

Resumen

El teorema de Steiner-Lehmus establece que si un triángulo tiene dos bisectores (internos) de la misma longitud, entonces el triángulo es isósceles. Aquí intentaremos probar, mediante herramientas de descubrimiento automático, un resultado más general en relación con la longitud de los bisectores internos y externos. También describiremos el caso de tres bisectores (internos o externos).

Dedicado al Prof. Eugenio Roanes Macías

Introducción

Un vértice de un triángulo da lugar a cuatro ángulos, dos a dos opuestos y dos a dos suplementarios. Consideremos las dos bisectrices, mutuamente perpendiculares, de estos ángulos. Denominemos *bisector* al segmento determinado sobre cada bisectriz por el vértice y el punto de intersección de la misma con el lado opuesto a dicho vértice. Hay, pues, dos bisectores en cada vértice, bisectores que denominaremos, respectivamente, *interno* y *externo*, según correspondan al ángulo del triángulo o a su suplementario.

Es bastante evidente que en un triángulo isósceles los bisectores correspondientes a los ángulos iguales han de ser de igual longitud. El Teorema de Steiner-Lehmus afirma que, recíprocamente, si se tiene tal igualdad de longitudes de los bisectores internos, el triángulo ha de ser isósceles. Se trata de un resultado de geometría elemental, obtenido a mediados del siglo XIX, pero que sigue, en la actualidad, despertando el interés de matemáticos de medio mundo, como puede leerse en [Be], donde se incluye un pequeño apunte histórico y algunas referencias sobre dicho Teorema. Otra referencia útil es la página web [S-L], donde se describen múltiples demostraciones (comentadas en muchos casos), con aportaciones de matemáticos de la talla de Coexeter, Conway y otros, y un listado de publicaciones –hasta hace diez años, aproximadamente-- sobre dicho resultado.

El Teorema de Steiner-Lehmus ha sido también objeto de estudio desde la perspectiva del *razonamiento automático* en geometría elemental. Se trata de un campo de investigación que busca desarrollar un procedimiento algorítmico universal para demostrar o descubrir resultados geométricos. Resulta curioso constatar el que uno de sus máximos exponentes, el profesor Wu Wen-Tsun, miembro de la Academia China de Ciencias, premio Herbrand en 1997 y premio Shaw en 2006, por sus trabajos sobre la mecanización de las matemáticas, haya publicado en 1985 un librito dedicado exclusivamente a la automatización de teoremas en torno a los triángulos con bisectores de igual longitud, ref. [WL]. Más recientemente, el mismo tema y enfoque aparece en un libro de Wang [W04] y en un artículo de Botana [B07].

A la vista de esta larga y rica historia, ¿qué pretendemos descubrir automáticamente sobre el teorema de Steiner-Lehmus? Se trata de encontrar, aplicando el mismo procedimiento de *descubrimiento automático* descrito en [R], [RV] y [DR], las condiciones que debe verificar un triángulo para que se verifique la igualdad de longitudes de dos y tres bisectores (asociados a vértices distintos), considerados estos con toda generalidad (esto es, tanto internos como externos).

Describiremos totalmente los triángulos con dos bisectores iguales (para vértices distintos), detallando la distinta casuística (interno=externo, externo=externo, etc.) y veremos que un triángulo con dos bisectores iguales (que no sean simultáneamente internos) no tiene porqué ser isósceles; es más, en el caso interno=externo no es nunca isósceles salvo en un pequeño número de posiciones cuyas coordenadas precisaremos. Este resultado puede deducirse de [W04] y [B07] sin mucha dificultad –usando, por ejemplo, la herramienta GeoGebra que describiremos más abajo --aunque allí no se detalla. Es curioso comparar la facilidad del procedimiento mecánico frente a las referencias de [Be] al paulatino progreso hacia el descubrimiento de distintos ejemplos de triángulos con bisectores iguales.

Finalmente trataremos el caso –aparentemente nuevo, aunque esto es difícil de afirmar en geometría elemental— de triángulos con tres bisectores iguales (correspondientes a vértices distintos). Tras describir con precisión todos los casos posibles, llegamos a dos conclusiones sorprendentes: no hay triángulos con dos bisectores internos y uno externo de igual longitud y tampoco hay triángulos con tres bisectores externos de igual longitud finita.

1. Planteamiento

Consideremos un triángulo $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(x,y)$. Construiremos el bisector (interno o externo) asociado a un vértice dado V mediante el siguiente método general:

- En cada una de las rectas que se intersecan en V, sobre las que descansan los lados del triángulo, tomamos un punto de forma que ambos puntos equidisten de V.
- Sean esos puntos P_1, P_2.
- Calculamos el punto medio M del segmento P_1P_2.
- Entonces, la recta VM es una bisectriz y su intersección con el lado opuesto (o su prolongación) determina el bisector correspondiente.

Observemos que posicionando adecuadamente los puntos P_1 y P_2 sobre los lados del triángulo (o sus prolongaciones) podemos obtener, mediante este método, los bisectores que concurren en V.

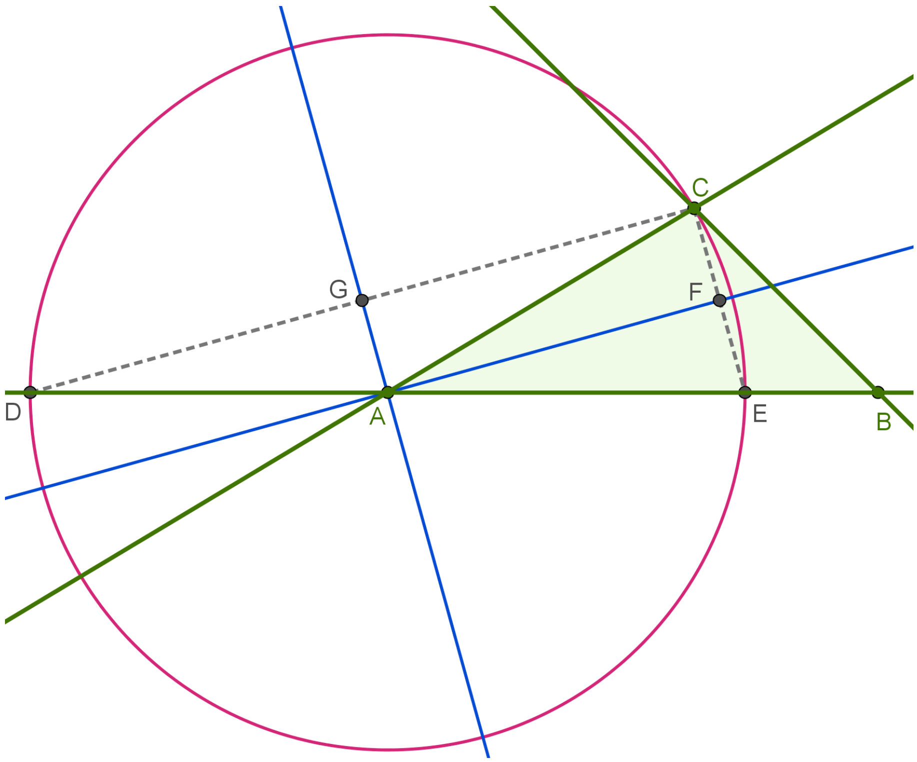


Figura 1

En la Figura 1 hemos aplicado el método descrito para obtener los dos bisectores de *A*, tomando $P_1=C$ y $P_2=E$ o $P_2=D$, siendo *F* el punto medio de *CE* y *G* el punto medio de *CD*. Las dos bisectrices para el vértice *A* son, por tanto, *AF* y *AG*. Finalmente, ya que nuestro interés se centra en la longitud de los segmentos bisectores desde *A* hasta el pie de las intersecciones de cada bisectriz con el lado opuesto, calculamos esos puntos de intersección entre las bisectrices y la recta *BC* que pasa por los otros dos vértices del triángulo.

Resumimos a continuación las ecuaciones resultantes para el triángulo *ABC*, donde $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(x,y)$:

Bisectores para A

Sea un punto (p,q) a la misma distancia que C$(x$,y) de A, por lo que cumple

$$p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

Coloquemos este punto en el lado AB, es decir, hagamos

$$q = 0$$

Entonces, el punto medio entre (p,q) y C será

$$\left(\frac{x+p}{2}, \frac{y+q}{2}\right)$$

y la recta definida por A y este punto medio intersecará al lado opuesto BC en el punto (a,b), verificándose

$$-a\frac{y+q}{2} + b\frac{x+p}{2} = 0$$

$$-ay + b(x-1) + y = 0$$

Por último, la distancia de (a,b) a A es:

$$a^2 + b^2$$

expresión que proporciona la longitud del bisector en A (ya sea interno o externo).

Bisectores para B

Sea un punto (r,s) a la misma distancia que $C(x$,y) de B. Se cumple que

$$(r-1)^2 + s^2 - ((x-1)^2 + y^2) = 0$$

Coloquemos este punto en el lado AB, es decir, hagamos

$$s = 0$$

Entonces, el punto medio entre (r,s) y C será

$$\left(\frac{x+r}{2},\frac{y+s}{2}\right),$$

y la recta definida por B y este punto medio intersecará al lado opuesto AC en el punto (m,n), verificándose

$$-m\frac{y+s}{2}+n\left(\frac{x+r}{2}-1\right)+\frac{y+s}{2}=0$$
$$-my+nx=0$$

Por último, la distancia de (m,n) a B es:

$$(m-1)^2+n^2$$

expresión que proporciona la longitud del bisector en B (ya sea interno o externo).

<u>*Bisectores para C*</u>

Sea un punto (u,v) a la misma distancia que A de C. Se cumple que

$$(u-x)^2+(v-y)^2-(x^2+y^2)=0$$

Coloquemos este punto en el lado BC, es decir, hagamos

$$-uy+v(x-1)+y=0$$

Entonces, el punto medio entre (u,v) y A será

$$\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)$$

y la recta definida por C y este punto medio intersecará al lado opuesto AB en el punto (t,z), verificándose

$$-(t-x)\left(\frac{v}{2}-y\right)+(z-y)\left(\frac{u}{2}-x\right)=0$$
$$z=0$$

Por último, la distancia de (t,z) a C es:

$$(t-x)^2+(z-y)^2$$

expresión que proporciona la longitud del bisector en C (ya sea interno o externo).

Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones que determinan las longitudes de los bisectores (respectivamente: a^2+b^2, $(m-1)^2+n^2$, $(t-x)^2+(z-y)^2$ está constituido por los siguientes tres bloques:

$$p^2+q^2-(x^2+y^2)=0$$
$$q=0$$
$$-a\frac{y+q}{2}+b\frac{x+p}{2}=0$$
$$-ay+b(x-1)+y=0$$

$$(r-1)^2+s^2-((x-1)^2+y^2)=0$$
$$s=0$$
$$-m\frac{y+s}{2}+n\left(\frac{x+r}{2}-1\right)+\frac{y+s}{2}=0$$
$$-my+nx=0$$

$$(u-x)^2+(v-y)^2-(x^2+y^2)=0$$
$$-uy+v(x-1)+y=0$$
$$-(t-x)\left(\frac{v}{2}-y\right)+(z-y)\left(\frac{u}{2}-x\right)=0$$
$$z=0$$

Este conjunto de ecuaciones puede considerarse como la colección de Hipótesis para las expresiones obtenidas relativas a la longitud de los bisectores.

Debemos tener en cuenta que cualquiera que sea el bisector que pudiéramos elegir en cada vértice (es decir, ya pensemos en un bisector interno o externo) deberá cumplir uno de estos bloques de ecuaciones. Y a la inversa, estas ecuaciones no permiten distinguir entre bisectores internos y externos.

2. Triángulos con dos bisectores iguales

Es fácil demostrar (por otros métodos) que dos bisectores internos tienen la misma longitud si y sólo si el triángulo es isósceles (y la igualdad de longitud entre dos lados es equivalente a la igualdad de los dos bisectores que se apoyan en esos lados iguales: teorema de Steiner-Lehmus). Además, es fácil ver que en este caso isósceles los bisectores externos (para los mismos vértices que tienen bisectores internos iguales) también coinciden en longitud (aunque no podamos afirmar que sea el único caso en que este hecho ocurre).

De este modo, el lugar geométrico del vértice C en el que dos bisectores internos son iguales es la unión de tres curvas:

- la recta $2x-1=0$ (la mediatriz del lado AB),
- la circunferencia $x^2+y^2-2x=0$ (con centro en B y radio 1, por lo que BC y AC tienen la misma longitud) y
- la circunferencia $x^2+y^2-1=0$ (con centro A y radio 1, por lo que AB y AC son iguales).

El punto C yace en una de estas tres curvas si y sólo si el triángulo es isósceles.

Además, esto implica que los tres bisectores internos coinciden en longitud precisamente cuando estas tres curvas coinciden, lo que sucede en las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} &2x-1=0 \\ &x^2+y^2-2x=0 \\ &x^2+y^2-1=0 \end{aligned}$$

es decir, en los puntos: $\left(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

A continuación, consideremos la tesis: Hay dos bisectores (internos o externos, aleatoriamente), asociados a diferentes vértices, que tienen la misma longitud. ¿Qué condición deberá cumplir el triángulo para verificar esta tesis?

2.1 Bisectores en *A* y *B*

Comencemos considerando los segmentos bisectores asociados a los vértices A y B. En este caso, consideraremos como tesis la igualdad:

$$a^2 + b^2 - ((m-1)^2 + n^2) = 0$$

que es en cierto modo más fuerte (ya que establece la igualdad de las longitudes para todas las interpretaciones de *(a, b)* y *(m, n),* esto es, para todos los pares de bisectores en *A* y *B*).

A continuación, seguimos el método de descubrimiento expuesto en [R], [RV] o [DR]. Es fácil comprobar que las dos únicas variables independientes (geométricamente significativas para la construcción) son *{x, y}*. Después añadimos la tesis a la colección de hipótesis y eliminamos en ese sistema (*H*+*T*) todas las variables excepto *{x, y}*.

Hipótesis

$$p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) = 0$$
$$q = 0$$
$$-a\frac{y+q}{2} + b\frac{x+p}{2} = 0$$
$$-ay + b(x-1) + y = 0$$

$$(r-1)^2 + s^2 - ((x-1)^2 + y^2) = 0$$
$$s = 0$$
$$-m\frac{y+s}{2} + n\left(\frac{x+r}{2} - 1\right) + \frac{y+s}{2} = 0$$
$$-my + nx = 0$$

Tesis

$$a^2 + b^2 - ((m-1)^2 + n^2) = 0$$

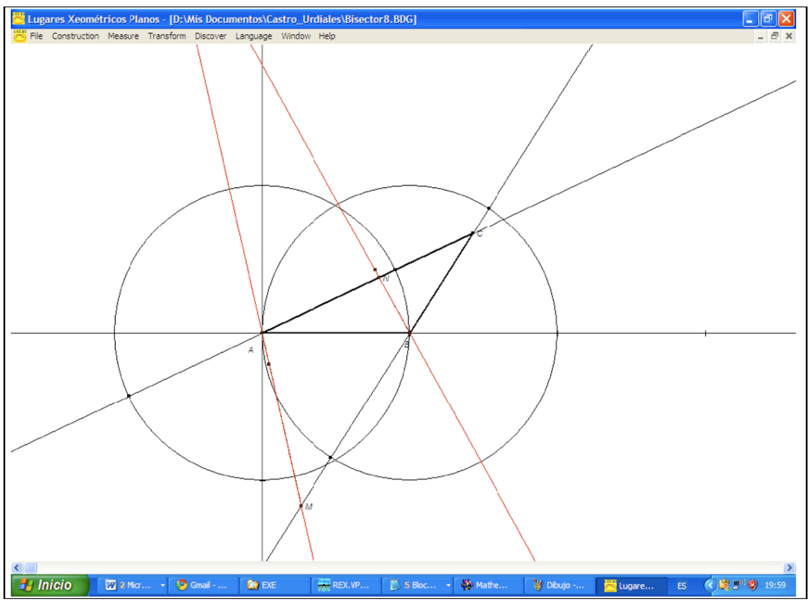
Obtenemos así (después de pocos segundos de cálculo con Maple en un portátil), el siguiente polinomio *P*, que se descompone como producto de tres factores.

- $14x^2y^4+y^2+246y^2x^6+76x^8-y^6+8x^{10}+9y^{10}-164y^2x^5+12y^4x-10x^2y^2-4x^4-44y^8x-136y^4x^3+278y^4x^4-64x^7-164x^7y^2+122y^6x^2-6y^4+8x^5-36y^6x+20y^2x^3+84y^4x^6+86x^4y^6+44x^2y^8+16x^6+41y^2x^8+31y^2x^4-40x^9-252y^4x^5-172y^6x^3+14y^8$
- y^3

- $2x-1$

Observemos que este resultado (con algunas simplificaciones geométricamente no significativas) se obtiene automáticamente (siguiendo el algoritmo mencionado) con algún software como *Lugares* o *GDI* (ambos de Botana-Valcarce, ver [B07]). Así, podemos usar el menú "Discover" de *GDI*, trazar la construcción correspondiente y luego preguntar por el lugar geométrico de *C* tal que (como en la siguiente imagen de la Figura 2) coincidan las longitudes de los bisectores en *A* y *B*.

Ahora bien, el método de descubrimiento automático señala que el producto de los tres factores de *P* proporciona la clausura de Zariski del conjunto de posiciones de *C* para las que existe un par de bisectores internos o externos de *A* y *B* (mezclando todas las posibilidades: externo de *A* con externo de *B*, externo de *A* con interno de *B*, etc.) de la misma longitud. En otras palabras, *P=0* proporciona la descripción más concisa (en términos de ecuaciones) de las condiciones necesarias para establecer la tesis débil (y, por tanto, también proporciona condiciones necesarias para la más fuerte).



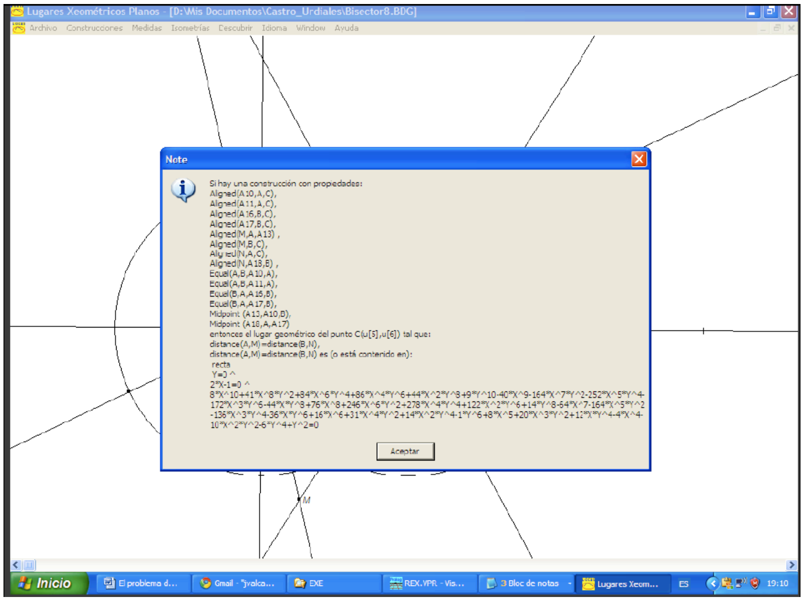


Figura 2

Como la ecuación $P=0$ correspondiente a este lugar geométrico es la curva (reducible), mostrada en la siguiente imagen de la Figura 3, se entiende que sólo una variable (x o y) permanece independiente si añadimos P al conjunto de hipótesis. Elijamos x (obtendríamos un desarrollo similar si nuestra elección hubiera sido y).

Ahora, siguiendo ese método de descubrimiento automático, añadiríamos P al conjunto de hipótesis y trataríamos de probar que $(H+P)$ es un conjunto de condiciones suficientes para T (salvo casos degenerados). El resultado del cálculo requerido (la saturación S de $(H+P)$ por T) es demasiado extenso para detallarlo aquí. Finalmente, debemos eliminar la variable y en S (ya que hemos escogido x como la variable independiente para $H+P$). El ideal de eliminación obtenido se reduce a (0). Esto significa, de acuerdo con la teoría de descubrimiento automático, que no hay manera de convertir $P=0$ en condición suficiente para establecer la tesis, incluso aunque se añadiese, a $P=0$ y a la hipótesis dada, una colección de inecuaciones en la variable x. Así pues, no podemos encontrar de este modo un teorema acerca de la igualdad de las longitudes de todos los tipos de bisectores en A y B.

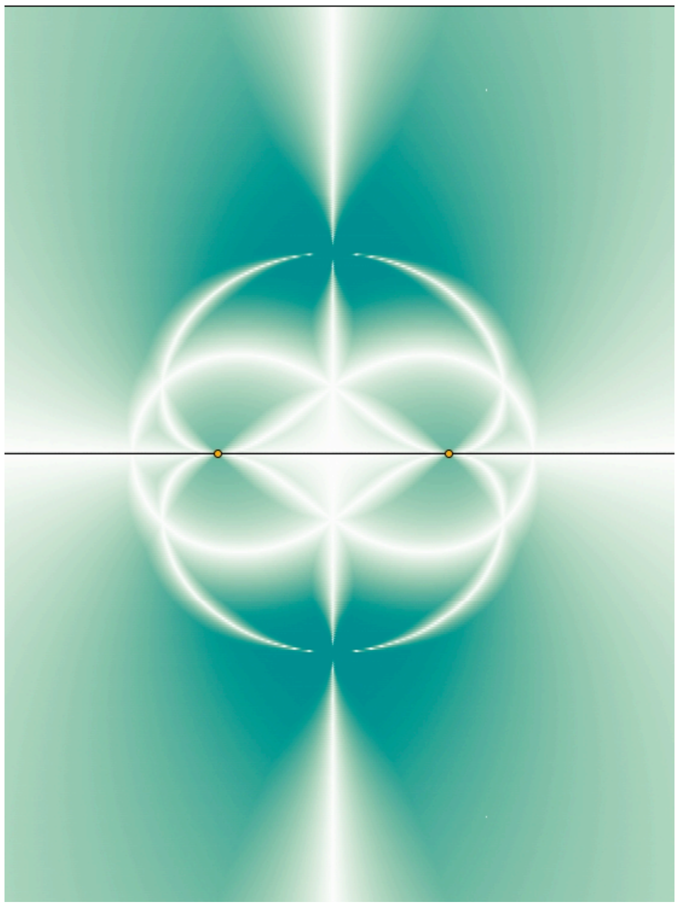


Figura 3

Esta conclusión, a partir de la teoría general, puede ser, en este caso particular, explicada en términos más “ad hoc”. De hecho, significa que para la mayoría de las posiciones de *C* en *P=0* (todas salvo casos degenerados) se puede encontrar una pareja de bisectores de *A* y *B* que no tengan igual longitud, pero también una pareja con igual longitud. Es decir, para algunos valores *(a,b)* y *(m,n)* correspondientes a una posición dada de *C*, las longitudes a^2+b^2 y $(m-1)^2+n^2$ serán diferentes, mientras que para otros valores, también correspondientes a la misma posición de *C*, serán iguales. Esto depende de las diferentes elecciones de *(a,b)* y *(m,n)* (bisectores internos y externos), pero no se pueden distinguir tales elecciones en términos algebraicos sin realizar una descomposición primaria (computacionalmente demasiado costosa) del ideal hipótesis.

Pero este fracaso -en demostrar la tesis fuerte- puede transformarse en éxito para la tesis débil (sobre la igualdad de alguna pareja de bisectores). De hecho, el anterior razonamiento muestra que la curva *P=0* proporciona las condiciones necesarias para establecer que “existe una pareja de bisectores de *A* y *B* de igual longitud”. Y, en virtud de cierto resultado teórico (Proposición 2 de [DR]), también proporciona las condiciones suficientes (excepto para algunos casos degenerados, demasiado difíciles de calcular en este caso) para establecer que “existe un pareja de bisectores de *A* y *B* de igual longitud”, lo cual es bastante satisfactorio si no se requiere mayor precisión sobre el tipo de bisectores que tienen la misma longitud. Además, por motivos geométricos, las condiciones necesarias para una declaración más precisa acerca del tipo de bisectores de igual longitud deben ser una unión de algunos de los tres factores de *P=0* (ya que *P=0* no puede dividirse en más partes algebraicas).

La factorización de *P* nos permite enunciar nuestro teorema recién descubierto como sigue:

Si *y=0* (triángulo degenerado) o $x = \frac{1}{2}$ (triángulo isósceles, con *AC*=*BC*) o *C*=(*x,y*) descansa en la curva que se muestra a continuación, entonces (excepto para el caso *y=0* más tal vez un número finito de posiciones degeneradas de esa curva) existe una pareja de bisectores de *A* y *B* de igual longitud.

Como corolario podemos decir que, dado que el caso isósceles atañe al caso de los bisectores internos iguales, y el eje *x* es un caso degenerado, la posibilidad que resta (la curva de arriba) trata con la igualdad de los bisectores interno/externo o externo/externo.

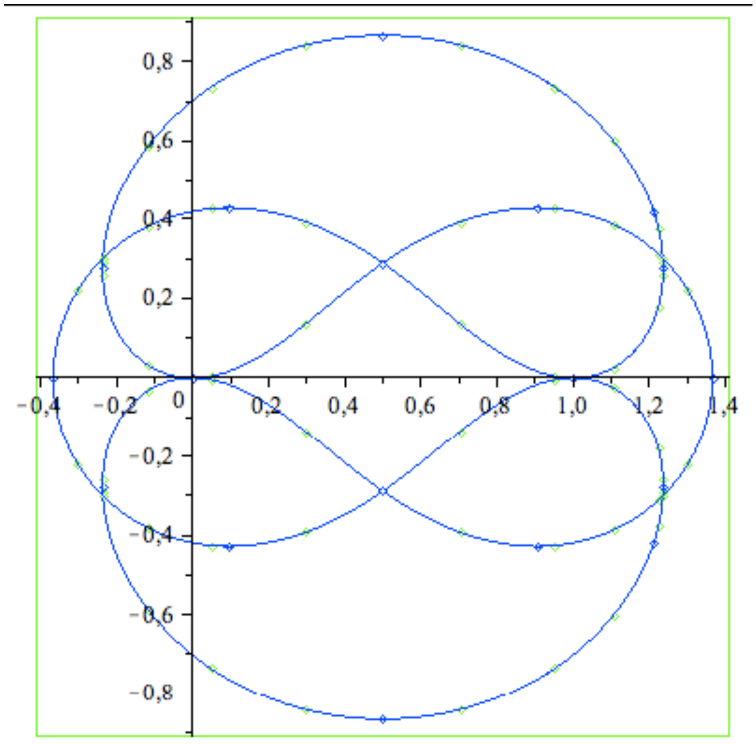


Figura 4

Usando la experimentación basada en el software de geometría dinámica GeoGebra[1] y un programa hecho a propósito por R. Losada, que barre todo el plano y resalta los puntos que verifican alguna relación numérica dada, podemos ser más precisos y mostrar que el caso de la igualdad interno/externo está contenido en dos "lágrimas" (ver la Figura 5 para uno de ellos, correspondiente a la igualdad de longitudes para el bisector externo de *B* y el interno de *A*) incluidas en la curva de la Figura 6, mientras que el caso de la igualdad externo/externo ocurre en los restantes puntos de esta curva. Puede verse la maravillosa imagen

[1] www.geogebra.org , http://geogebra.es

de R. Losada, asignando colores diferentes a los diversos casos de igualdad (un color dado es asignado a un punto que está más próximo a la verificación de una de las igualdades de longitud: por ejemplo, el amarillo corresponde a aquellos puntos que están más próximos a la igualdad del par de bisectores externo/externo, como aparece en la Figura 6).

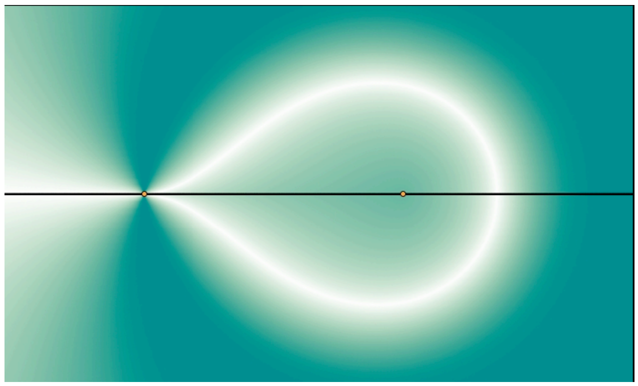


Figura 5

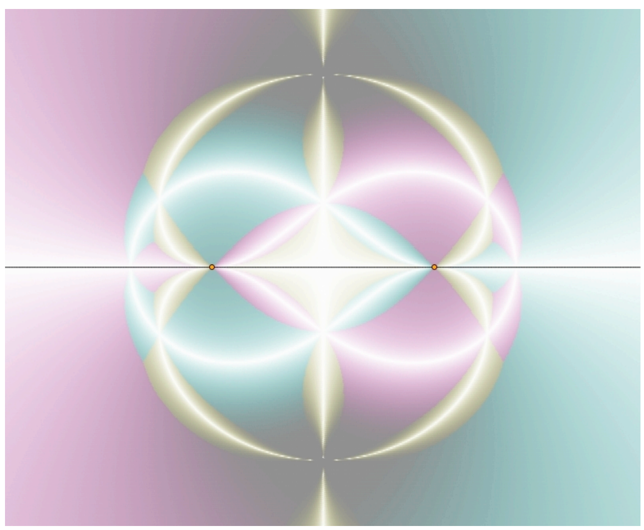


Figura 6

Para finalizar, podemos decir que ahora estamos en condiciones de "demostrar" la tesis más fuerte sobre la posición de *C* para la igualdad de longitudes de los cuatro bisectores con vértices *A* y *B*, considerando los puntos de la intersección común de todas las partes de esta curva compleja que corresponden a la igualdad de alguna clase de pares de bisectores. Vemos que, sin tener en cuenta las posiciones degeneradas de *C* en el eje *X*, los únicos puntos que verifican la igualdad de todas las longitudes de los bisectores de *A* y *B* se obtienen resolviendo el sistema:

- $2x - 1 = 0$
- $14x^2y^4+y^2+246y^2x^6+76x^8-y^6+8x^{10}+9y^{10}-164y^2x5+12y^4x-10x^2y^2-4x^4-44y^8x-136y^4x^3+278y^4x^4-64x^7-164x^7y^2+122y^6x^2-6y^4+8x^5-36y^6x+20y^2x^3+84y^4x^6+86x^4y^6+44x^2y^8+16x^6+41y^2x^8+31y^2x^4-40x^9-252y^4x^5-172y^6x^3+14y^8=0$

y eligiendo, entre sus soluciones (cuatro reales) aquellas que están en la intersección de ambas "lágrimas" (dado que estas contienen los puntos en los que algún bisector interno tiene igual longitud que uno externo y, por tanto, en el punto de intersección todas las longitudes son iguales). De hecho, las otras dos soluciones corresponden a puntos en los que las longitudes de los bisectores internos coinciden y también las de los bisectores externos, pero no son todas iguales entre sí –como es fácil de verificar, porque el triángulo es equilátero en esos puntos. Por tanto, las soluciones verdaderas son los puntos:

$$x = \frac{1}{2},\ y = \pm\frac{1}{2} RootOf(-1 + 3Z^2) \quad \textit{aprox.} \ (0.5, \pm 0.2886751346)$$

en los que los cuatro bisectores tienen igual longitud.

2.2 Bisectores en A y C

Ahora vamos a tener en cuenta los bisectores con vértices *A* y *C*, esto es, consideramos como tesis la siguiente ecuación:

$$(a^2 + b^2) - ((t - x)^2 + (z - y)^2) = 0$$

que establece la igualdad de longitudes para todas las interpretaciones de (a,b) y (t,z), o lo que es lo mismo, para todos los pares de bisectores desde *A* y *C*.

Hipótesis: $p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) = 0$

$$q = 0$$
$$-a\frac{y+q}{2} + b\frac{x+p}{2} = 0$$
$$-ay + b(x-1) + y = 0$$

$$(u-x)^2 + (v-y)^2 - (x^2 + y^2) = 0$$
$$-uy + v(x-1) + y = 0$$
$$-(t-x)\left(\frac{v}{2} - y\right) + (z-y)\left(\frac{u}{2} - x\right) = 0$$
$$z = 0$$

Tesis: $(a^2 + b^2) - ((t-x)^2 + (z-y)^2) = 0$

El proceso descrito para el caso de *A, B*, se ejecuta análogamente en el caso *A,C*, lo que proporciona un nuevo polinomio *Q*, compuesto de cuatro factores.

- y^3 (caso degenerado)
- $x^2 + y^2$ (caso degenerado)
- $x^2 + y^2 - 2x$ (circunferencia con centro *B* y radio 1, por lo que *C* está en la circunferencia cuando longitud *AB*=longitud *BC*)
- $x^8y^2+4x^6y^4+6x^4y^6+4x^2y^8+y^{10}-4x^8-18x^6y^2-30x^4y^4-22x^2y^6-6y^8+ 8x^7+ 28x^5y^2+ 32x^3y^4+12xy^6+16x^6+31x^4y^2+14x^2y^4-y^6-64x^5-100x^3y^2-36xy^4+76x^4+94x^2y^2+14y^4-40x^3-44xy^2+8x^2+9y^2$ (la curva mostrada en la Figura 7)

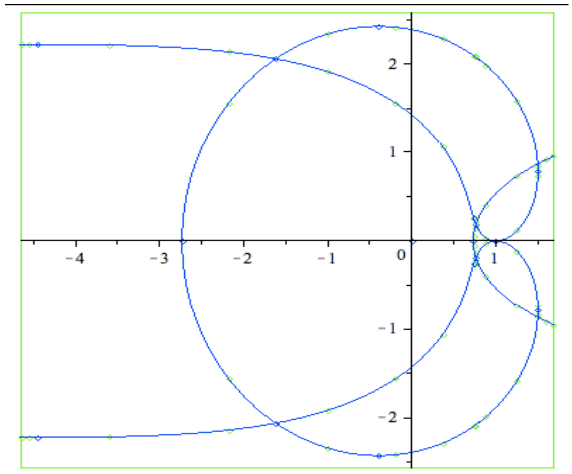


Figura 7

En la Figura 8 mostramos la imagen de la unión de las curvas definidas por $Q=0$.

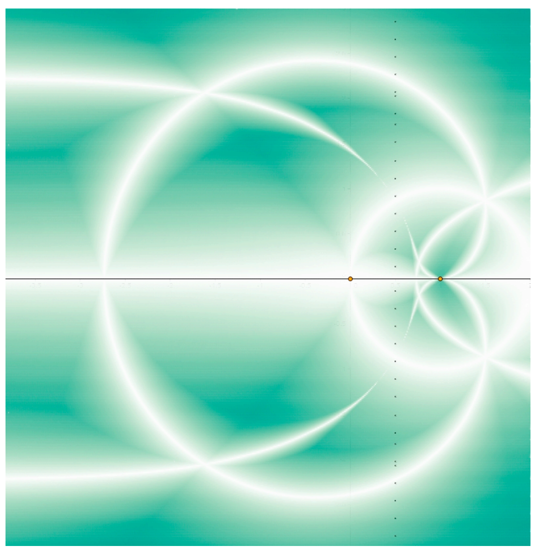


Figura 8

Como antes, podemos afirmar que si el punto C está en este lugar entonces hay dos bisectores de A y C que tienen igual longitud. El caso en el que ambos bisectores son internos corresponde a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x$, por lo que la curva de grado diez contiene las posiciones de C tales que algún par de bisectores interno/externo, externo/interno o externo/externo de A y C tienen igual longitud. Experimentalmente (de nuevo, gracias a R. Losada) podemos determinar que la curva de la Figura 9 corresponde a la igualdad del bisector interno de C y el bisector externo de A, mientras que la de la Figura 10 corresponde al caso en que el bisector externo de C iguala al bisector interno de A, y la "parábola" restante que va a menos infinito en el eje X está asociada al caso externo de C / externo de A.

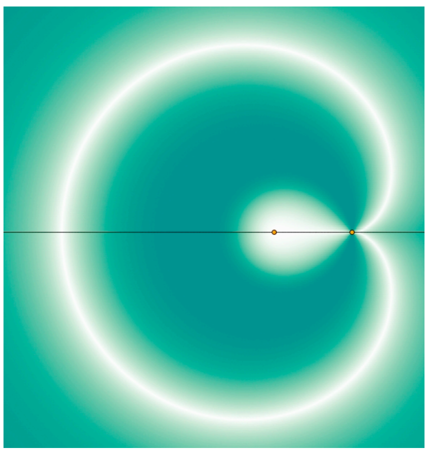


Figura 9

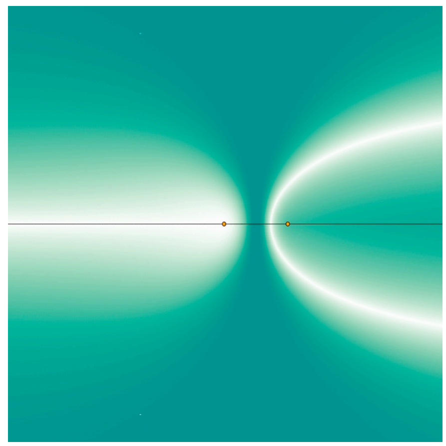


Figura 10

El caso de igualdad de longitudes para todos los diferentes pares de bisectores tratados en este apartado puede ser resuelto como en el anterior, proporcionando los puntos $x = \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} RootOf(-3 + Z^2)$.

2.3 Bisectores en *B* y *C*

La última situación, que considera los bisectores de vértices *C* y *B*, es tratada similarmente, proporcionando la curva que es la unión de las definidas por los polinomios

- $x^8y^2+4x^6y^4+6x^4y^6+4x^2y^8+y^{10}-8x^7y^2-24x^5y^4-24x^3y^6-8xy^8-4x^8+10x^6y^2+30x^4y^4+14x^2*y^6-2y^8+24x^7+24x^5y^2+8x^3y^4+8xy^6-40x^6-29x^4y^2-10x^2y^4-5y^6+24x^5+8xy^4-4x^4+18x^2y^2-2y^4-8xy^2+y^2$
- x^2+y^2-1 (circunferencia con centro en *A* y radio 1, por lo que *C* está en esta circunferencia cuando longitud *AC*=longitud *AB*)
- y^3 (un caso degenerado)

En la Figura 11 aparece la imagen de la curva de grado 10.

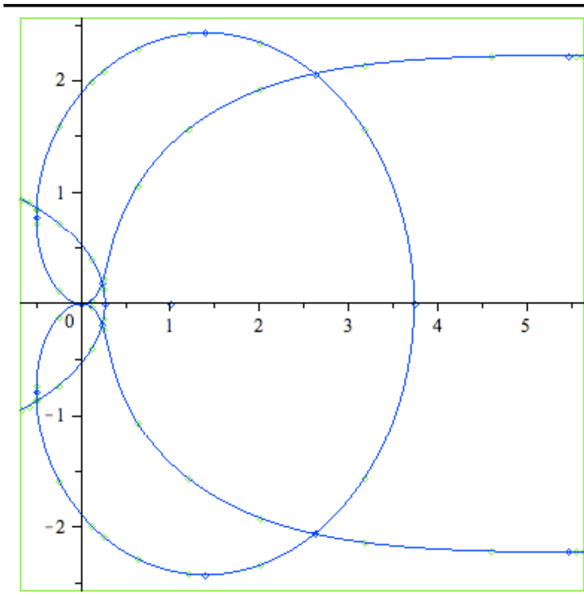


Figura 11

Al considerar la igualdad de todas las longitudes de los diferentes pares de bisectores involucrados en este caso y tratarlo como se indicó anteriormente, obtenemos los puntos:

$$x = -\frac{1}{2},\ y = \pm\frac{1}{2} RootOf(-3 + Z^2).$$

3. Tres bisectores iguales

A continuación, consideraremos la tesis: hay tres bisectores (internos o externos, cualesquiera) que tienen igual longitud. ¿Cuál es la condición que tiene que verificar el triángulo para que la tesis se verifique? De nuevo, interpretamos esta situación considerando el siguiente sistema de dos tesis:

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 - ((m-1)^2 + n^2) = 0 \\
&(a^2 + b^2) - ((t-x)^2 + (z-y)^2) = 0
\end{aligned}$$

que es más fuerte que la tesis requerida, ya que aquí sus soluciones contemplan el que todas las interpretaciones de *(a,b)*, *(m, n)*, *(t, z)* (es decir, para todos los posibles pares de bisectores de cada vértice) conduzcan a la igualdad de la longitudes de los bisectores de *A, B* y de *A, C*, y, por tanto, de *A, B* y *C*.

En todo caso, podemos operar como antes, siguiendo el procedimiento general, añadiendo las dos tesis a la hipótesis, lo que constituirá la colección completa de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
&p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) = 0 \\
&q = 0 \\
&-a\frac{y+q}{2} + b\frac{x+p}{2} = 0 \\
&-ay + b(x-1) + y = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(r-1)^2 + s^2 - ((x-1)^2 + y^2) = 0 \\
&s = 0 \\
&-m\frac{y+s}{2} + n\left(\frac{x+r}{2} - 1\right) + \frac{y+s}{2} = 0 \\
&-my + nx = 0
\end{aligned}$$

$$(u-x)^2+(v-y)^2-(x^2+y^2)=0$$
$$-uy+v(x-1)+y=0$$
$$-(t-x)\left(\frac{v}{2}-y\right)+(z-y)\left(\frac{u}{2}-x\right)=0$$
$$z=0$$

$$a^2+b^2-((m-1)^2+n^2)=0$$
$$(a^2+b^2)-((t-x)^2+(z-y)^2)=0$$

Tras eliminar todas las variables excepto $\{x,y\}$, obtenemos el siguiente ideal generado por varios polinomios (presentados aquí como el producto de sus factores irreducibles):

- $y^3(2x-1)(136x^2y^4+115021x^2y^2-23136x^2+23136x-115021xy^2-136xy^4-21504+95149y^2+116789y^4)$,
- $y^3(2x-1)(17x^2-17x-2+19y^2)(x^2-x+1+y^2)$,
- $-y^3(2x-1)(103155x^2y^2-20960x^2-103155xy^2+20960x+85459y^2-136y^6-19328+104787y^4)$,
- $y^3(377084y^2x^4-17856-61088x^4-148192x^2-381436xy^4+87104x-412545xy^2+80325y^2+544y^8+96005y^4-754168x^3y^2+122176x^3-2856y^6+789629x^2y^2+381436x^2y^4)$

El conjunto de soluciones de este sistema de polinomios de dos variables es el eje *X* más un número finito de puntos reales y complejos. Ahora podemos continuar con su interpretación, utilizando el método de arriba, como condiciones necesarias para la igualdad de algunos tripletes de longitudes de bisectores de *A*, *B* y *C* (pero la clase de los bisectores involucrados puede ser diferente con cada triplete), etc. Siendo más precisos, obtenemos soluciones del siguiente tipo:

- $x=\frac{1}{2},\ y=\pm\frac{1}{2}\mathit{RootOf}(-3+Z^2)$ (*aprox.* $x=0.5,\ y=\pm 0.8660254040$)

El triángulo es equilátero y verifica la igualdad de longitudes de los bisectores internos de A, B y C (y, en algún sentido, de los bisectores externos, ya que todos ellos tienen longitud infinita).

- $x = \frac{2}{17} - \frac{2}{17} RootOf\left(4Z^4 + 349Z^2 - 64\right)^2, \pm RootOf\left(4Z^4 + 349Z^2 - 64\right)$

  ($aprox.$ $x = 0.09611796796$, $y = \pm 0.4277818044$)

  Estos puntos corresponden a la igualdad de longitudes de los bisectores externos de A y C y el bisector interno de B.

- $x = \frac{15}{17} + \frac{2}{17} RootOf\left(4Z^4 + 349Z^2 - 64\right)^2, y = \pm RootOf\left(4Z^4 + 349Z^2 - 64\right)$

  ($aprox.$ $x = 0.09038820320$, $y = \pm 0.4277818044$)

  Estos puntos corresponden a la igualdad de longitudes de los bisectores externos de B y C y el bisector interno de A.

- $x = \frac{1}{2}, y = \pm RootOf\left(4Z^4 - 19Z^2 - 4\right)$ ($apr.$ $x = 0.5$, $y = \pm 2.225295714$)

  Estos puntos corresponden a la igualdad de longitudes de los bisectores externos de A y B y el bisector interno de C.

Obsérvese que podemos obtener estos mismos resultados mediante la intersección simultánea de los tres lugares geométricos encontrados en las secciones precedentes. Finalmente, permítasenos señalar que, a la vista de estas soluciones, no hay triángulos con dos bisectores internos y uno externo (para vértices diferentes) de igual longitud y tampoco hay triángulos en los que los tres bisectores externos tienen longitudes iguales (excepto para el caso de longitud infinita).

Referencias

[Be] F. Bellot : *Triángulos Especiales* (I). Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas. Enero-Febrero, 2005.

[B07] F. Botana: *Bringing more intelligence to dynamic geometry by using symbolic computation*, en Symbolic Computation and Education. Editado por Shangzhi Li, Dongming Wang y Jing-Zhong Zhang. World Scientific, pp. 136-150, 2007.

[DR] G. Dalzotto, T. Recio: *On protocols for the automated discovery of theorems in elementary geometry*. J. Automat. Reason. (pendiente de aparecer).

[R] T. Recio: *Cálculo simbólico y geométrico*, Editorial Sintesis. Madrid. 1998.

[RV] T. Recio, M. P. Vélez: *Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry*, J. Automat. Reason. 23: 63--82 (1999).

[S-L] http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/steiner-lehmus

[W04] D. Wang: *Elimination practice: software tools and applications*, Imperial College Press, Londres, 2004

[WL] W.-t. Wu, X.-L. Lü: *Triangles with equal bisectors*. People's Education Press, Pekin, (1985) [en chino].