MOSAICOS CON GEOGEBRA

EQUIPO G4D

Arranz San José, José Manuel. IES Europa, Ponferrada (León)
josemarranz@gmail.com
Losada Liste, Rafael. IES de Pravia, Pravia (Asturias)
rafaelll@educastur.princast.es
Mora Sánchez, José Antonio. IES Sant Blai, Alicante
jmora7@gmail.com
Sada Allo, Manuel. Centro de Apoyo al Profesorado de Pamplona, Pamplona (Navarra)
manuel.sada@gmail.com

Este capítulo es una versión reducida, una introducción y una guía para el documento interactivo que se incluye en el CD de este libro y que se encuentra accesible en la sección *Mosaicos* del portal del equipo G4D, http://geometriadinamica.es. En el documento completo se puede disponer de applets java con animaciones de las propuestas de trabajo que aquí se presentan.

LOS MOSAICOS

Una forma de distinguir un palacio de las grandes casas de alrededor consiste en utilizar materiales más valiosos. Cuando no se dispone de mármoles o de piedras preciosas, se recurre a la decoración de las paredes para realzar el edificio. A la derecha tenemos el mosaico de la pajarita en la Alhambra de Granada.

Cada civilización ha utilizado los materiales a su disposición para desarrollar una estética propia, y los mosaicos son un buen ejemplo. Los romanos utilizaron pequeñas teselas de forma no predeterminada y distintos colores para componer figuras. Como muestra, vemos a la derecha un mosaico de Empúries, Girona. La técnica es distinta a la utilizada por el arte islámico, que diseñaba baldosas de cerámica coloreadas, en muchos casos de la misma forma, con las que componer otras más complejas.

Se podría pensar que la sensación de belleza que produce el diseño y contemplación de estos mosaicos es personal e intransferible, pero también es una impresión compartida culturalmente y en ella intervienen varios factores:

- La regularidad o simetría de las baldosas.
- Los elementos de simetría de la composición completa.
- Las conexiones del diseño de una baldosa con las adyacentes, es decir, la continuidad de las líneas, porque esto permite la generación de formas complejas más grandes que se repiten en el mosaico.

Podríamos resumir estas ideas con una frase de H. Weyl: *La simetría es una idea, por medio de la cual el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección*.

Además de motivos estéticos, hay otros de índole tecnológica y económica para la construcción de mosaicos, como es la creación de un molde (baldosa para el suelo, azulejo cerámico para las paredes, motivo en los papeles pintados, patrón textil, etc.), para que solo tengamos que construir una pequeña parte y podamos componer el diseño completo mediante repetición.

Pero no solo a las personas les preocupa la construcción de mosaicos. Un problema clásico de la geometría en la naturaleza –anterior a la misma geometría como actividad humana– consiste en rellenar el plano con baldosas, de forma que no queden huecos entre ellas ni se produzcan solapamientos. Para conseguirlo, necesitaremos dos cosas:

- Una o varias baldosas que se repiten: las abejas "prefieren" –aunque hay razones físicas y geométricas que explican tal preferencia–, el hexágono regular para sus celdas y las tortugas también optan por el hexágono, aunque no tan regular, para sus caparazones, mientras los humanos se inclinan por el cuadrado y el rectángulo para sus pavimentos y los diseños de sus estancias.
- Una determinada forma de repetirla, es decir, uno o varios movimientos que permitan pasar de una baldosa a otra. De esa forma, solo tenemos que encontrar suficientes baldosas como la inicial y seguir el plan trazado para colocar las siguientes.

LOS MOSAICOS EN CLASE

En este trabajo vamos a contemplar diversas actividades, para la clase de matemáticas, en torno a los mosaicos. Esta propuesta está muy relacionada con los contenidos geométricos de los dos cursos del último ciclo de Primaria y todos los de Secundaria. Veamos algunos de ellos:

- El dominio de los conceptos y de la terminología de los elementos geométricos, y el análisis de las relaciones entre objetos.
- Medida y cálculo de longitudes, superficies y ángulos.
- Estudio de traslaciones, giros y simetrías y su utilización para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.
- La utilización de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano.
- La utilización de procedimientos como la composición, la descomposición, la intersección, el truncamiento, la dualidad, el movimiento y la deformación.

Además del listado de contenidos, el currículo actual de matemáticas pone un gran énfasis en la *utilización de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre ideas matemáticas*. Entre esos instrumentos se citan de manera explícita los programas de geometría dinámica, *que permiten a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas*. Esas son las principales cualidades de GeoGebra, un software matemático de geometría dinámica que ofrece grandes posibilidades tanto para el estudio de la geometría como para el álgebra o las funciones, y a través del cual vamos a desarrollar nuestras propuestas de actividades. GeoGebra se puede utilizar y descargar gratuitamente, visitando la página web www.geogebra.org. Su uso es muy intuitivo y sencillo, sin requerir especiales conocimientos informáticos previos.

Para trabajar con los mosaicos, utilizaremos una colección de herramientas que GeoGebra pone a disposición del usuario para obtener de forma fácil la imagen trasladada, girada o simétrica de cualquier otra. Las animaciones en java de la página de internet, a la que nos hemos referido al principio de este artículo, o del CD que acompaña el libro, permiten que esos movimientos se puedan realizar sin disponer apenas de conocimientos de GeoGebra. Se pueden realizar las transformaciones diseñadas sin más que activar en GeoGebra un interruptor o mover un punto sobre un segmento (deslizador). Esta posibilidad de modificar los elementos de la construcción hace que el estudiante pueda profundizar en los conocimientos y establecer relaciones entre ellos. Todo ello tiene una gran influencia en la formación de actitudes positivas de los alumnos hacia las matemáticas y, además, nos permite conectar con otras áreas, especialmente con Plástica, Ciencias Sociales y Tecnología.

El estudio de los mosaicos que se propone en este artículo no requiere una gran instrucción matemática previa, por lo que puede interesar a alumnos que en otro caso plantearían dificultades. Además, se pueden diseñar distintos niveles de profundización en el trabajo, de forma que todos puedan realizar aprendizajes a su nivel, algo que muchas veces es difícil de conseguir: la diferenciación en nuestras clases de matemáticas.

PLAN DE TRABAJO

Comenzaremos este capítulo con una sección dedicada el estudio de las isometrías: los movimientos en el plano que conservan las distancias. Se ha creado una colección de applets java que ilustran, en la página web que desarrolla este trabajo, cada una de las de las isometrías que se utilizan después a partir de fotografías de Pilar Moreno[1].

[1] Se pueden encontrar fotografías de Pilar Moreno en las exposiciones virtuales de Divulgamat http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/artefoto/01PM.asp y en la sección Fotografías y Matemáticas del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado. http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/matefoto/libro/index.htm.

Se puede observar cuándo una figura es simétrica por traslación, rotación o simetría axial. A continuación se lleva cada movimiento al estudio de un mosaico para observar su efecto sobre la composición: el significado de que un mosaico sea simétrico al realizar alguno de los movimientos (trasladar, girar, simetría axial o simetría con deslizamiento), es decir, en qué casos un mosaico queda invariante al realizar una de las cuatro isometrías.

Hay diversas formas de entender esta idea de coincidencia del mosaico con el transformado. Normalmente, los mosaicos son coloreados (o en blanco y negro), pero en este artículo **solo se tendrá en cuenta la forma** de los diseños creados, **nunca su color;** es decir, todas las figuras de un mosaico (estas que aquí se ven con forma de avión, por ejemplo) serán tomadas como iguales, tanto las negras como las verdes o las marrones, y se incluye entre ellas las de color blanco que surgen como huecos entre las coloreadas. Podremos pasar de unas a otras mediante movimientos.

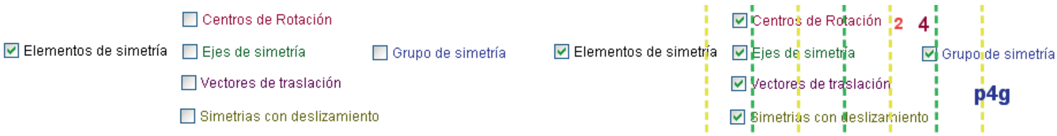
La segunda sección de este trabajo se dedica a la construcción de celosías: mosaicos formados por la repetición de una baldosa cuadrada que contiene un motivo en su interior. Normalmente, este diseño contiene algún elemento de simetría axial o rotacional. Es la forma de decorar la parte superior de los muros que rodean las casas: se pone la primera baldosa y se sigue un patrón de colocación, hasta que se completa la pared. De todas las formas posibles de colocación, se han seleccionado cuatro, que consisten, básicamente, en superponer una baldosa sobre otra ya colocada y moverla después: trasladarla, girarla (90º alrededor de un vértice o 180º alrededor del punto medio de un lado) o bien "dar la vuelta a la baldosa" que se correspondería con colocar la simetría axial respecto de un lado del cuadrado. Estudiaremos las composiciones que se producen y veremos que, bajo ciertas condiciones, distintos movimientos dan como resultado la misma celosía.

Para cerrar este apartado, utilizaremos una pequeña colección de baldosas del Museo del Azulejo de Onda[2] que completan un catálogo en el que aparecen los distintos elementos de simetría que pueden darse en el interior de la baldosa.

El trabajo concluye con un estudio más profundo de ciertos mosaicos, utilizando para ello diseños de M.C. Escher, algunos islámicos y uno semirregular. El estudio completo aparece en la página web a la que se ha hecho referencia o en el CD que acompaña este libro. En cada uno de ellos se realiza el estudio iniciado en las

[2] Colección de azulejería del siglo XIX del Museo del Azulejo de Onda. http://www.spaintiles.info/esp/historia/museo.asp.

celosías, analizando una a una las isometrías que lo mantienen invariante, para llegar al grupo cristalográfico al que pertenece. La forma de hacer aparecer los elementos de simetría consiste en activar una colección de interruptores (GeoGebra los llama casillas de tildado).



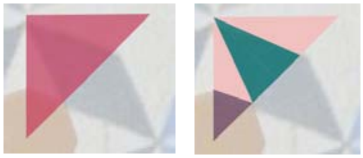
- Los **centros de rotación** se marcan en distintas tonalidades de rojo, dependiendo de su orden.
- Los **ejes de simetría** aparecen como una línea punteada de color verde.
- Los **vectores de traslación** se representan como dos vectores de color morado con trazo muy grueso.
- Los **ejes de simetría con deslizamiento** se ven como líneas punteadas de color amarillo. Normalmente, también aparece, además, un vector paralelo al eje en color marrón: es el deslizamiento que hay que realizar después de la simetría para que el mosaico vuelva a coincidir consigo mismo.
- El **grupo de simetría** (en azul) es el código correspondiente al grupo cristalográfico según la notación simplificada que se verá más adelante.

Una vez realizado el trabajo de análisis y de catalogación de cada mosaico, se realiza un segundo estudio que se gobierna desde un deslizador verde colocado en la zona superior izquierda de la pantalla. Este parte de una baldosa básica, generalmente un polígono (cuadrado, triángulo, rectángulo, rombo o hexágono), que puede verse sometido a dos tipos de transformaciones:

- Deformación de algunos de los lados que se lleva a los otros lados mediante traslaciones, giros o simetrías. Para cada mosaico se reproducen aquí algunas instantáneas que permiten hacerse una idea del proceso.

  En los applets se puede ver la secuencia animada completa, en la que cada parte se mueve de forma continua mediante la isometría elegida en ese momento para construir la figura ideada por Escher: un hombre, un lagarto, un pájaro o un insecto.

- Descomposición de la baldosa en otras piezas más pequeñas que generarán el diseño final cuando se unan a otras como ella, si seguimos un determinado patrón de construcción.



Esta es una forma de comenzar el estudio de los mosaicos colocándose en la posición del creador de mosaicos. Todo parte de un polígono que rellena el plano y se deforma de manera controlada para generar una figura que tenga una apariencia de animal (real o figurado).

Si se desea estar en la posición del observador del mosaico de Escher e intentar descubrir la baldosa poligonal que lo generó, se puede visitar la web de Manuel Sada[3]. En sus ejemplos, toma como punto de partida la baldosa ya generada por Escher, e intenta descubrir, paso a paso, la forma poligonal que ha servido de base al diseño.

Una vez tenemos la nueva baldosa diseñada, se utilizan las isometrías que han aparecido en el análisis previo para generar nuevas baldosas iguales a ella.

A la figura del hombre azul, por ejemplo, se le imprimen dos rotaciones de 120º (amarillo) y 240º (rojo) para rellenar el plano alrededor del centro de giro. En el paso siguiente utilizamos dos vectores de traslación con direcciones independientes para mostrar que podemos rellenar el plano la figura compuesta por tres hombres. Para acabar, solo tenemos que repetir el proceso de traslación de forma indefinida, y rellenaremos el plano con la figura ideada por M.C. Escher.

Cuando el deslizador llega al extremo superior, se puede activar la casilla ***Ver puntos.*** En ese momento aparecen los primeros puntos que se han marcado para descomponer la primera baldosa. Si la activamos, podremos modificar los puntos iniciales para formar una figura diferente a la de Escher, que también rellenará el plano.

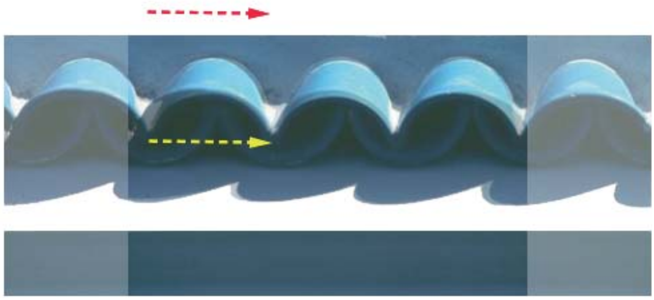
3 La página de Manuel Sada se encuentra en http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/escher.htm.

I. LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO

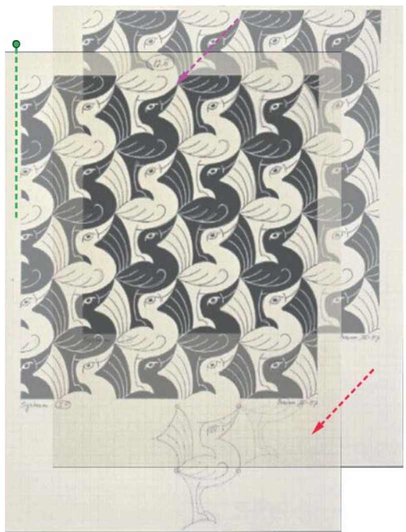
Para exponer cada uno de los movimientos en el plano, se recurre inicialmente a una imagen que coincide consigo misma al ser trasladada, girada o al hacer una simetría axial. Con este fin se han utilizado fotografías de Pilar Moreno en las que se captan objetos en ciertas situaciones de la vida cotidiana. En ellas, la simetría salta a la vista, y permiten a los estudiantes reflexionar sobre estas ideas. Un segundo paso lleva ese concepto a los mosaicos: de qué forma una composición que rellena el plano queda invariante después de realizar un movimiento.

TRASLACIÓN

Decimos que una figura tiene simetría de traslación cuando coincide consigo misma tras desplazarla según un determinado vector. Aquí tenemos las fotografías, una reja y unas tejas, en las que podemos observar esta situación. De cada una de ellas se han hecho dos copias, a las que se ha tamizado el color y una de ellas se ha desplazado según el vector marcado hasta que vuelven a coincidir los motivos fotografiados.



Un mosaico tiene simetría traslacional cuando todo el mosaico queda invariante al ser desplazado según un determinado vector.



En la figura de la derecha tenemos dos copias superpuestas de un mosaico de Escher. En el applet comprobamos que al mover el deslizador verde de la izquierda, uno de los mosaicos se desliza sobre el otro en la dirección del vector marcado (en color rojo) que une dos colas del ave.

Durante el proceso se ve aparecer un vector rojo en la parte inferior, que indica el trayecto recorrido por uno de los dos mosaicos hasta llegar al final, cuando el vector rojo es igual al morado inicial. En ese momento, los mosaicos vuelven a coincidir.

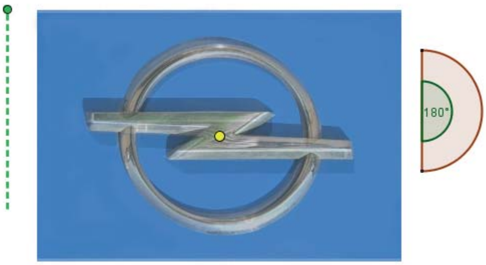
Una forma de conseguir este efecto sobre el papel consiste en realizar una copia del mosaico sobre una transparencia de forma que ambas coincidan, y trasladar una de ellas en línea recta para ver cuándo vuelven a coincidir.

ROTACIÓN

Una figura tiene un centro de rotación cuando, al dar un giro (menor que 360º) alrededor de un punto, vuelve a coincidir consigo misma.

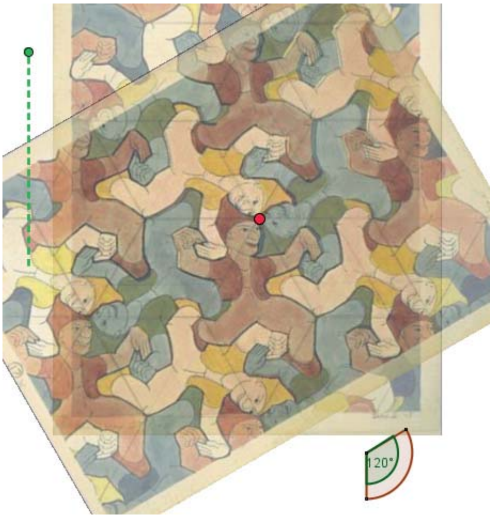
El orden de rotación es la cantidad de veces que podemos girar la figura alrededor de ese punto, y coincide con la original, hasta dar una vuelta completa.

Estas fotografías corresponden a dos conocidas marcas de coches con simetría rotacional de órdenes 2 y 3:



Un mosaico tiene simetría rotacional cuando, al realizar una rotación alrededor de un punto, todo el mosaico vuelve a coincidir.

Este mosaico de los hombres de M.C. Escher tiene centros de rotación de orden 3: se ha representado uno de ellos con un punto rojo. Si desplazamos en el applet el punto verde del deslizador hacia arriba, uno de los mosaicos permanece estático, mientras que el otro realiza un giro de 120º, hasta que los hombres se vuelven a situar justo encima de los de la copia inferior (aunque han cambiado los colores, ya se advirtió que no importa el color, solo la forma). En la parte inferior derecha tenemos representado el ángulo de giro.



Se puede desplazar el punto rojo para buscar otros centros de rotación del mosaico, y comprobar con el deslizador verde si es correcto.

SIMETRÍA AXIAL

Un eje de simetría axial en una figura es una recta por la que podríamos plegar el papel de forma que las dos partes coincidiesen. Cada punto de uno de los lados tiene su correspondiente al otro lado: se traza una perpendicular al eje que pase por ese punto y se toma otro punto al otro lado, el que se encuentre a la misma distancia de la recta que el inicial.

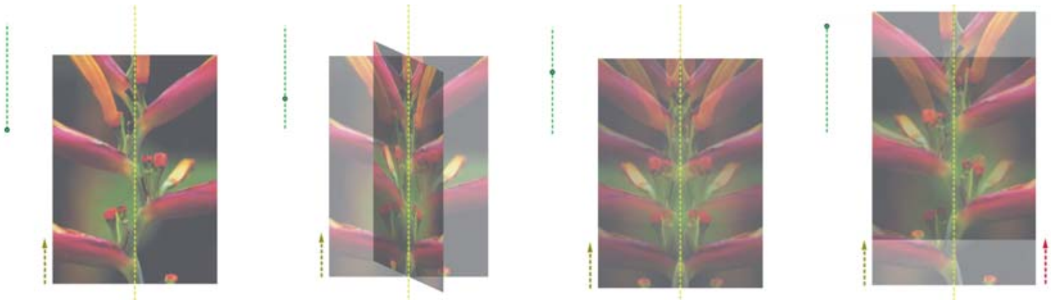
En la imagen del puente de Brooklyn se puede comprobar el efecto de la simetría con la animación representada en el applet. Se han colocado dos imágenes de la misma fotografía. Mientras una de ellas se mantiene fija, en la otra se simula la simetría al estilo de *dar la vuelta al papel* manteniendo fijos los puntos que corresponden al eje.

Cuando un mosaico tiene simetría axial, al dar la vuelta al mosaico completo respecto del eje de simetría, vuelve a coincidir completamente con el inicial. Podemos comprobar el efecto de la simetría con la secuencia de imágenes de un applet:

SIMETRÍA CON DESLIZAMIENTO

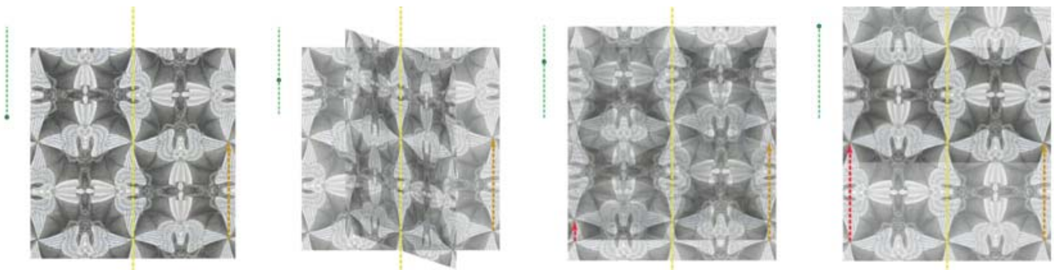
Un ejemplo clásico de la simetría con deslizamiento son las huellas de las pisadas al caminar sobre la arena. En realidad, es la combinación de dos movimientos; una simetría axial y una traslación con un vector paralelo a ese eje.

En la fotografía de Pilar Moreno se da primero la vuelta a la imagen, de forma que los brotes de la flor cambian de lado, y después se va trasladando la fotografía hacia la parte superior con un vector paralelo al eje.



A pesar de ser un movimiento en dos pasos, combinación de otros dos movimientos, es importante en el estudio de los mosaicos, porque en algunos casos un mosaico puede tener ejes de simetría con deslizamiento sin que tenga ejes de simetría.

En el applet se ha realizado una secuencia en dos pasos. En el primero, se hace la simetría axial del mosaico respecto del eje representado por una línea de puntos de color amarillo. Acto seguido se ejecuta una traslación según el vector representado a la derecha. Un nuevo vector (rojo) representa el deslizamiento realizado hasta ese momento.

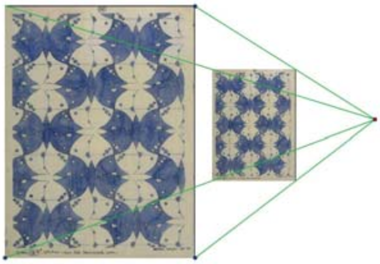


LAS CUATRO ISOMETRÍAS

Una isometría es un movimiento que mantiene las distancias. Sólo hay cuatro movimientos en el plano que pueden hacerlo, los que se han analizado hasta el momento en los apartados anteriores: traslación, rotación, simetría axial y simetría con deslizamiento. Estas isometrías consiguen que los mosaicos periódicos vuelvan a coincidir consigo mismos en determinadas condiciones.

Se ha preparado un applet que simula las cuatro isometrías sobre la imagen del mosaico número 60 de M.C. Escher que representa una colección de mariposas blancas y azules. Sobre él se realizan consecutivamente los cuatro movimientos al desplazar el deslizador verde de la izquierda hacia arriba. Comprobaremos que las mariposas vuelven a coincidir con las originales en cada uno de los casos.

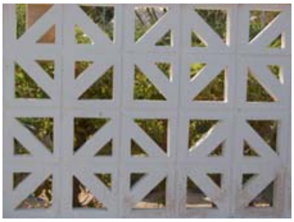
Hay otros movimientos, como la **homotecia** o **dilatación** (también disponible en GeoGebra), que mantienen la forma pero no el tamaño. En la imagen tenemos una homotecia de razón ½ en la que todas las medidas quedan reducidas a la mitad. Este tipo de movimientos que no mantienen las distancias quedan excluidos de nuestro estudio.



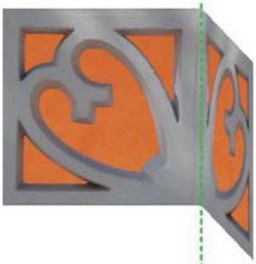
II. LA CONSTRUCCIÓN DE CELOSÍAS

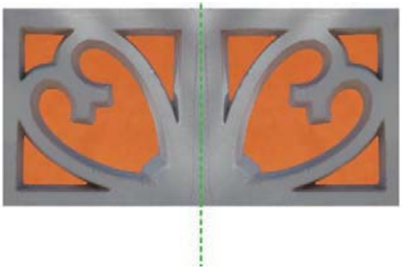
Las celosías se construyen con baldosas, normalmente cuadradas, que contienen un diseño interior. Se colocan en la parte superior de los muros por varios motivos: en primer lugar, las zonas huecas suponen una descarga del peso del muro sobre su base; en segundo, dejan pasar la luz que después puede tamizarse con un seto y, por último, aportan un motivo decorativo a una pared normalmente lisa. Si los dos primeros motivos (peso y luz) se pueden abordar desde la física, el tercero nos llevará por el camino de la geometría.

La colocación se realiza mediante diversos movimientos de dichas baldosas: traslaciones, giros y simetrías de la baldosa original.

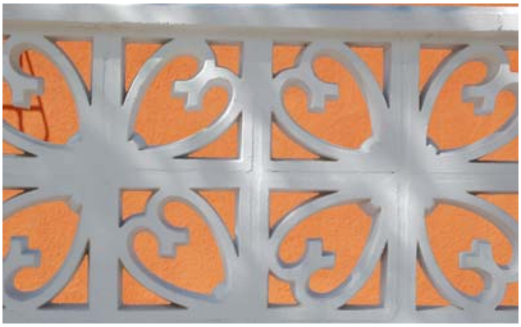


Una de las formas más frecuentes de colocar este tipo de baldosas consiste en hacer simetrías axiales tomando como ejes los lados del cuadrado. Se consigue situando la nueva baldosa sobre una ya colocada y dando un giro de 180º "en el aire" (utilizando la tercera dimensión), como se puede ver en la secuencia de imágenes que sigue:





En algunos casos se dan situaciones no deseadas. Es el caso de la celosía de la derecha, en la que se observa un intento de seguir el patrón de colocación anterior, pero ha habido un error en una de las baldosas. Al principio cuesta localizarla, pero una vez se ha encontrado, la vista, casi siempre, se dirige hacia ella.

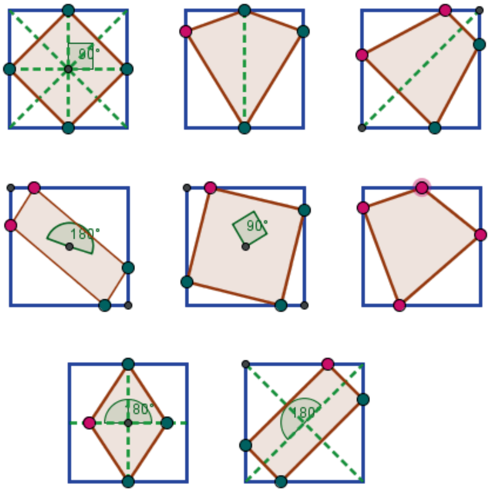


LA BALDOSA

Se han fabricado baldosas cuadradas con el diseño de un cuadrilátero coloreado en su interior, intentando que tenga sus vértices sobre el lado del cuadrado inicial. Después, se puede modificar la posición de estos puntos marcados en color rojo para cambiar la forma del motivo interno y comprobar lo que pasa en la celosía.

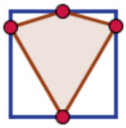
Si se toma como referencia la simetría de la baldosa, se distinguen hasta ocho casos distintos que podemos ver en la imagen. De izquierda a derecha y de arriba abajo:

- Cuatro ejes de simetría (con centro de rotación de orden 4).
- Un eje de simetría que puede pasar por los puntos medios de dos lados opuestos o por vértices opuestos.
- Simetría rotacional de orden 2.
- Simetría rotacional de orden 4.
- Sin simetría.
- Dos ejes de simetría a los que hay que añadir simetría rotacional de orden 2. En uno de ellos, los vértices ya no pueden estar sobre los lados del cuadrado y se han colocado dos de ellos en el interior.

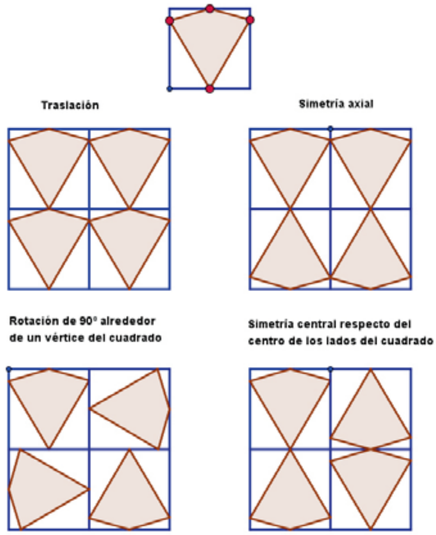


Es posible hacer un planteamiento de trabajo conjunto para la mayoría de los diseños —faltará el séptimo—: colocando cada uno de los vértices del cuadrilátero interior sobre uno de los lados del cuadrado, se puede pasar de un caso a otro sin más que cambiar la posición de los puntos rojos.

LOS MOVIMIENTOS



Una vez seleccionada la baldosa —en la imagen se ha tomado una de las que tiene un eje de simetría—, solo falta elegir el movimiento. Se han seleccionado de cuatro tipos distintos:

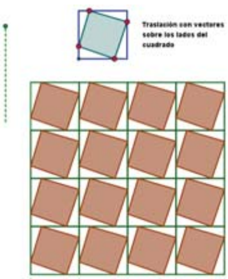
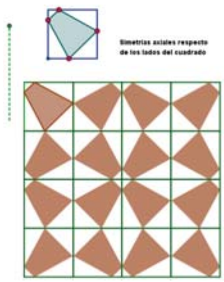
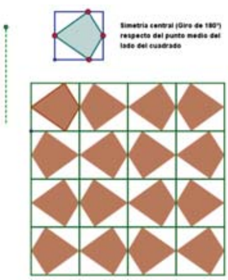
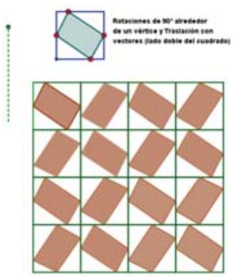


- Traslaciones de vectores situados sobre los lados del cuadrado.
- Simetría axial respecto de los lados del cuadrado.
- La combinación de rotación con traslación: en primer lugar, rotaciones de 90º alrededor de uno de los vértices del cuadrado para formar una baldosa cuadrada 2 × 2, que después se traslada en dos direcciones paralelas a los lados del cuadrado.
- Simetría central (rotación de 180º) respecto de los puntos medios de los lados del cuadrado.

Veremos el efecto de estos movimientos en una baldosa con eje de simetría paralelo a los lados.

En la versión de internet (o en el CD) se han diseñado cuatro applets, uno para cada movimiento. En ellos podemos subir y bajar el deslizador verde de la izquierda para analizar poco a poco el movimiento que genera el mosaico completo. Por otra parte, todavía es posible desplazar los puntos rojos de la baldosa inicial para modificar la forma del cuadrilátero interior y comprobar el efecto que se produce en la composición mediante la elección de unos elementos de simetría diferentes. En las siguientes imágenes tenemos:

- Traslaciones de una baldosa que tiene centro de rotación de orden 4.
- Simetrías axiales de baldosa con un eje de simetría que une vértices opuestos.
- Simetrías centrales de baldosa con simetría axial.
- Rotaciones+traslaciones a una baldosa con simetría rotacional de orden 2.

Obsérvese que tan interesante o más que los diseños que introducimos en los cuadrados son los huecos que quedan entre ellos:

- Polígonos estrellados de cuatro puntas.
- Cuadrados de dos tamaños y rombos en dos orientaciones.
- Figuras poligonales que pueden parecer barcos de papel hacia arriba/hacia abajo.
- Polígonos estrellados de dos tamaños.

Estos diseños permiten abrir en clase un debate sobre el papel que ocupan la forma y el fondo en estos diseños que está muy presente en el trabajo de Escher.

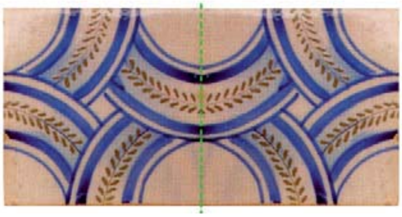
DISEÑO Y COLOCACIÓN DE AZULEJOS

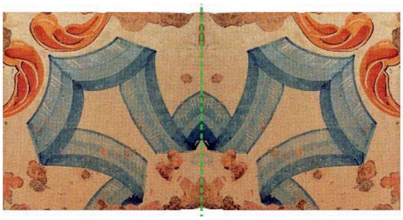
Cada una de las ocho baldosas cuadradas con diferentes elementos de simetría que han servido como modelo para la construcción de celosías en el apartado anterior, tiene su réplica en el catálogo de la colección de azulejos de serie del siglo XIX del Museo del Azulejo de Onda. Empezaremos por una baldosa sin simetría, después dos con simetría rotacional (órdenes 2 y 4), dos que tienen un eje de simetría, otras dos con dos ejes y, por último, la más simétrica con 4 ejes.

Se puede estudiar el efecto que se produce al colocarlas según los cuatro movimientos seleccionados anteriormente. En cada caso se analizarán los elementos de simetría del mosaico, que en los applets se hacen aparecer y ocultar con una colección de interruptores en la parte inferior.

Hay que remarcar una dificultad que surge ahora con la simetría axial; cuando se realiza este movimiento en la celosía del muro, lo que se hace es dar media vuelta en el espacio para pasar de cada bloque al contiguo.

Esto no siempre es posible con los azulejos porque no están pintados por la cara posterior, de forma que, en algunos casos, habrá que pensar en diseñar dos azulejos en lugar de uno. Es el caso del de la derecha, mientras que en el de la izquierda no será necesario ya que, al tener un eje de simetría axial, la baldosa simétrica es la misma que se obtendría al girarla 90º alrededor de un vértice.





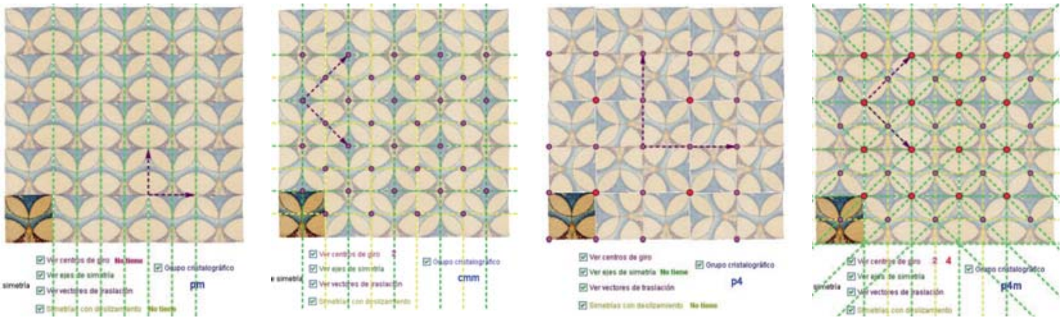
Para cada uno de los mosaicos construidos, se aporta el grupo cristalográfico al que pertenece. Este trabajo se realizará en mayor profundidad en la siguiente sección; por ahora, solo constataremos que con este tipo de azulejos, y con estas formas de colocarlos, surgen 9 de los 17 grupos cristalográficos.

El estudio completo de las ocho baldosas se realiza en la página de internet de geometriadinamica.es mencionada al principio, o en el CD de este libro. En los applets de java podemos hacer que las isometrías aparezcan poco a poco al pulsar los interruptores. Aquí veremos tres ejemplos representativos de este tipo de trabajo.

EJEMPLO 1: BALDOSA CON UN EJE DE SIMETRÍA QUE UNE CENTROS DE LADOS OPUESTOS

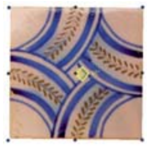
Obtenemos cuatro mosaicos distintos, uno para cada forma de colocarlos. De izquierda a derecha: traslación, simetría central, rotación alrededor de vértice y simetría axial.

Se puede comprobar que el efecto visual es diferente en cada caso y que esa sensación que proporcionan es producto del orden, la regularidad y la simetría. Una forma de cuantificar esas sensaciones es recurrir al estudio de las isometrías. Aquí se puede ver superpuesto a las imágenes anteriores:

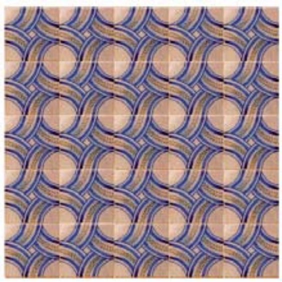


Otro elemento a tener en cuenta es la conexión de las líneas de una baldosa con las adyacentes; en este caso, la simetría axial es la que proporciona mayor cantidad de líneas y colores conectados.

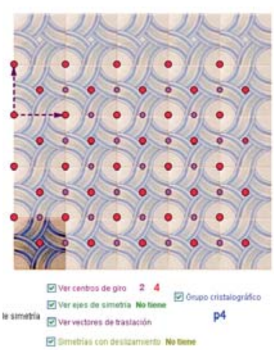
EJEMPLO 2: BALDOSA CON UN EJE DE SIMETRÍA QUE UNE VÉRTICES OPUESTOS

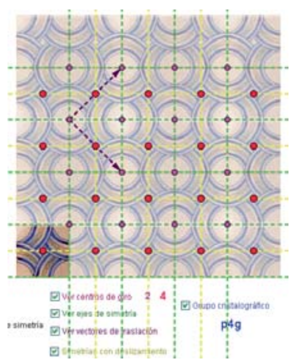


Con esta baldosa, tres de los procedimientos de colocación (traslación, simetría central y rotación de las baldosas alrededor de un vértice) dan el mismo resultado que vemos en el mosaico de la izquierda, mientras que el de la derecha es el que se obtiene mediante simetrías axiales.



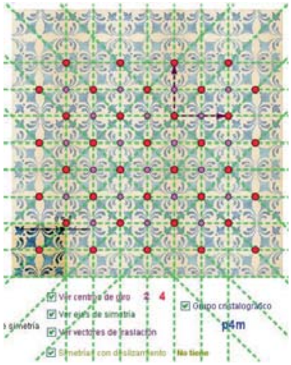
La primera solo tiene centros de rotación: los de orden 4 que ya tenía la baldosa, y otros de orden 2 en los puntos medios de los lados. La colocación mediante simetrías axiales hace que los lados del cuadrado se conviertan en ejes de simetría, y sus vértices serán centros de rotación de orden 2.





EJEMPLO 3: BALDOSA CON CUATRO EJES DE SIMETRÍA AXIAL Y CENTRO DE ROTACIÓN DE ORDEN 4

En este caso da igual cómo coloquemos las baldosas porque siempre obtendremos el mismo mosaico.



Las composiciones con las otras cinco baldosas se encuentran en la página de internet citada.

III. LOS MOSAICOS Y LOS GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

PROPUESTA DIDÁCTICA

En esta sección se muestra una colección de mosaicos a los que se ha realizado el siguiente análisis:

- Se detectan todas las isometrías del mosaico y el grupo de simetría al que pertenece.
- En unos casos se estudia la forma de generar la baldosa de la figura a partir de un polígono, y en otros, la división de la baldosa mínima en trozos coloreados más pequeños que compondrán el mosaico completo por repetición.
- La forma de construir el mosaico completo a partir de la baldosa creada anteriormente.

Como **guía de trabajo** en clase, se puede utilizar la siguiente secuencia de preguntas para los alumnos:

1. Marca sobre el mosaico todas las isometrías o movimientos en el plano que observes y descríbelas por escrito.
   a. Si encuentras traslaciones, da el vector.
   b. Si hay rotaciones, marca el centro y el ángulo que puedes girar para que vuelva a coincidir.
   c. Dibuja los ejes de simetría.
   d. Busca los ejes de simetría con deslizamiento marcando el eje y el vector de traslación paralelo a ese eje.

2. Observa el entramado que se genera y describe la baldosa que se encuentra en su interior. ¿A qué tipo de polígono se llega? Describe la malla o trama oculta en la que se apoyó el diseñador del mosaico.
3. Toma una de las baldosas y describe las instrucciones para reproducir todo el mosaico.

En los applets de java podemos mostrar y ocultar las imágenes que dan respuesta a estas cuestiones. Si se va a trabajar sobre papel, es conveniente disponer de dos copias iguales de cada mosaico, una de ellas sobre acetato. De esa forma, se puede mover una copia del mosaico sobre la otra para estudiar las isometrías del mosaico.

EL NOMBRE DEL GRUPO CRISTALOGRÁFICO

Como resumen de los apartados anteriores, podemos reseñar que hay cuatro isometrías, que son los movimientos en el plano que conservan las distancias. Dos de ellas mantienen la orientación: la traslación y la rotación. Las otras dos invierten la orientación: la simetría y la simetría con deslizamiento. En matemáticas se ha estudiado este tema desde la óptica de las estructuras y se ha demostrado que hay, exactamente, 17 grupos llamados cristalográficos planos. Reciben ese nombre porque el estudio surge del trabajo de científicos y geómetras, como Fedorov, que a finales del siglo XIX estudiaban la estructura de los cristales.

La estructura de grupo hace necesarias tres condiciones:

- Que exista un movimiento identidad (la traslación de vector nulo o el giro de 0º).
- Que cada movimiento tenga inverso; es decir, que cada isometría se pueda deshacer con otra (una traslación con otra de vector igual pero de sentido contrario, una simetría axial con otra que tenga el mismo eje, etc.).
- Que la composición de dos isometrías sea también una isometría del grupo (ley interna). Esto, en los movimientos, se traduce en ideas del tipo "dos simetrías de ejes paralelos es igual a una traslación de vector perpendicular a los ejes de módulo igual al doble de la distancia que separa los ejes".

Este trabajo es útil para la catalogación de un mosaico porque permite diferenciar bien unos mosaicos de otros y ofrece una información adicional, ya que la pertenencia de un mosaico a uno de los grupos nos garantiza el conocimiento de todos los detalles del mosaico y los de cualquier otro con las mismas características. Si queremos saberlo todo de un mosaico, basta con saber cómo es la baldosa mínima que lo genera por repetición y cuáles son los movimientos necesarios para componerlo.

Lo primero que se hace es determinar un paralelogramo, llamado primitivo, que pueda generar el mosaico mediante dos vectores de traslación colocados sobre sus lados (no confundir con la baldosa mínima que puede ser aún más pequeña al poder utilizar isometrías distintas de la traslación). Con rectas paralelas a los lados del paralelogramo se organiza una trama. De todos los paralelogramos posibles, se toma aquel que tenga los vértices sobre centros de rotación de orden máximo. Si no hay centros de rotación (orden 1), hacemos coincidir los ejes de simetría con los lados o con las diagonales.

La notación establecida por la Unión Internacional de Cristalografía[4] (Comité Español), también conocida como notación de Hermann-Mauguin[5], consta de cuatro símbolos ordenados:

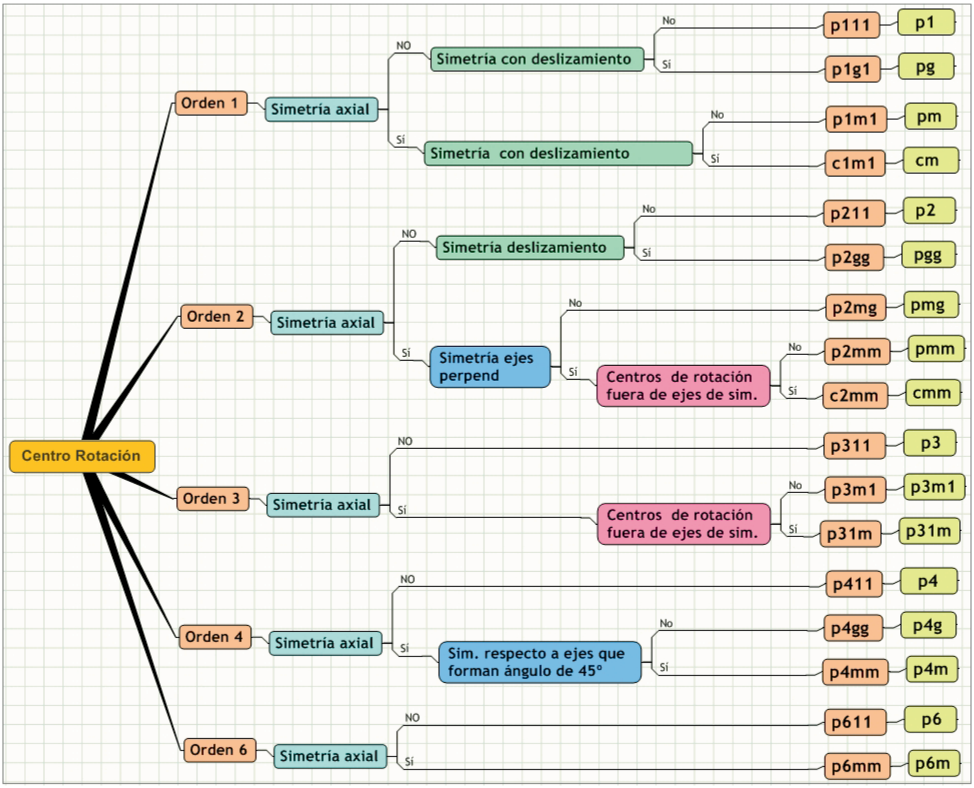
- **Símbolo 1.** Es **c** ("centrado") cuando el paralelogramo primitivo es un rombo que se puede enmarcar centrándolo en un rectángulo y **p** ("primitivo") en cualquier otro caso. De los 17 grupos, solo dos son centrados: cm y cmm.
- **Símbolo 2.** El mayor orden de rotación que podamos encontrar. Puede ser **1** (ángulo de 360º), **2** (ángulo de 180º), **3** (ángulo de 120º), **4** (ángulo de 90º) o **6** (ángulo de 60º). Cuando un mosaico tiene un centro de rotación de un orden determinado, también tendrá otros centros de órdenes divisores.
- **Símbolo 3.** Corresponde al tipo de simetría y puede tener dos símbolos: **m** ("mirror" = espejo), simetría especular o axial, y **g** ("glide" = deslizamiento), cuando tiene simetría con deslizamiento.
- **Símbolo 4.** La misma clasificación anterior, respecto a la presencia o no de un segundo tipo de ejes de simetría (**m** o **g**).

En el siguiente diagrama se expone un algoritmo para averiguar a cuál de los 17 grupos corresponde un mosaico. El nombre se encuentra en la penúltima columna en color naranja. En muchas ocasiones se usa una abreviatura estándar de esta cadena de símbolos, la vemos en la última columna en color amarillo. En esta forma abreviada, una **m** o algunos dígitos no aparecen porque pueden deducirse sin posibilidad de confusión con otro grupo. Es necesario advertir que los diseños p31m y

[4] La dirección de la Unión Cristalográfica Internacional http://www.iucr.org/ y el Comité español, http://www.icmm.csic.es/comcrist/historia.htm.

[5] Información sobre el cristalógrafo Carl Hermann en Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Hermann.

p3m1 son una excepción a esta notación. Para más información, recomendamos una visita a la página de Wikipedia[6].



En la página de internet de G4D y en el CD que acompaña al libro se ilustra cada grupo cristalográfico con uno o varios mosaicos. Los applets permiten la interacción sobre la construcción de varias maneras:

- Los elementos de simetría del mosaico aparecen y desaparecen al accionar los interruptores de la parte inferior.
- Se puede reproducir una secuencia animada de la construcción de la baldosa generadora del mosaico a partir de un polígono básico que transforma su silueta para adquirir una nueva forma, o se descompone en piezas más pequeñas que se unirán a otras iguales a ella.
- La composición del mosaico a partir de la nueva forma generada utilizando las isometrías.

[6] Página de Wikipedia dedicada a los mosaicos y los grupos cristalográficos http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group.

Estas dos últimas secciones se activan desde un deslizador de color verde colocado a la izquierda del mosaico.

Por razones de espacio, en este artículo solo hemos reproducido ocho de los mosaicos. Además, hemos tenido que sustituir las animaciones por imágenes fijas o secuencias de imágenes del proceso seguido.

MOSAICO ESCHER 128. GALLOS. GRUPO P1

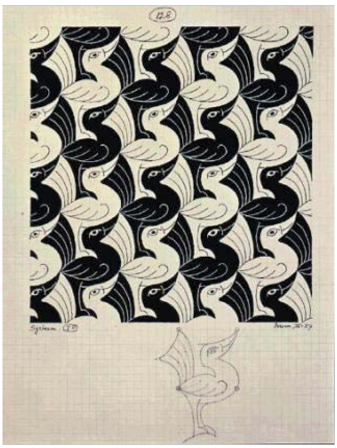
ELEMENTOS DE SIMETRÍA

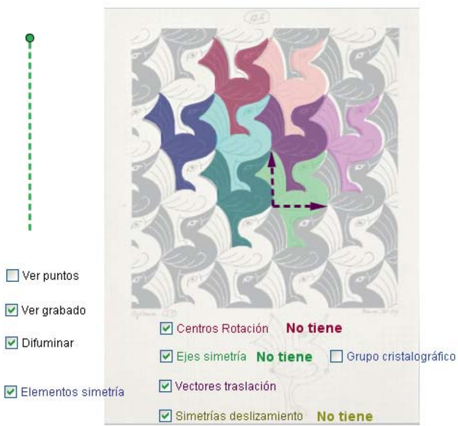
La única simetría de este grupo es la traslación según dos vectores que en este caso pueden ser perpendiculares.

Para construir la baldosa mínima, se parte, inicialmente, de un cuadrado, aunque también podría ser un paralelogramo. Las transformaciones de dos de sus lados se llevan a los lados opuestos mediante traslación.

CONSTRUCCIÓN DEL MOSAICO

Las traslaciones hacen aparecer nuevos gallos: primero, los más oscuros con el vector oblicuo y, después, con traslaciones horizontales se rellenan los huecos con la misma figura.





MOSAICO ESCHER 78. UNICORNIOS. GRUPO PG

ELEMENTOS DE SIMETRÍA

No tiene centros de rotación ni ejes de simetría.

Tiene vectores de traslación y ejes de simetría con deslizamiento.

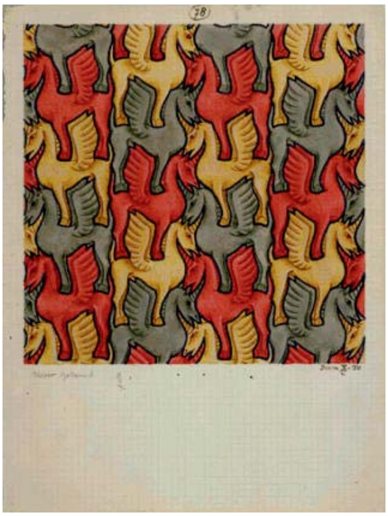
La baldosa mínima inicialmente es un rectángulo que va a sufrir dos transformaciones distintas.

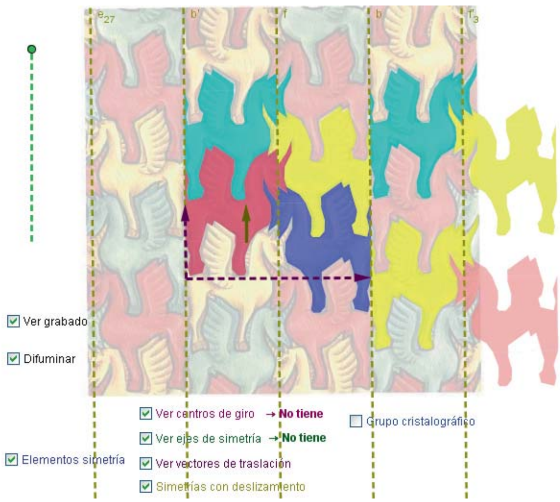
- En uno de los lados verticales se realiza una simetría con deslizamiento (ese lado será precisamente eje de simetría con deslizamiento del mosaico). La transformación también se hace en el lado opuesto, pero es mucho menos significativa y solo se ha representado el primero por las dificultades posteriores de la composición.
- Uno de los lados horizontales se deforma y se lleva al lado opuesto por traslación.

CONSTRUCCIÓN DEL MOSAICO

Se hace la simetría del unicornio respecto a uno de los lados verticales, seguida del deslizamiento (traslación con vector paralelo al eje).

El resto de figuras se obtiene mediante traslaciones de los dos primeros.





MOSAICO ESCHER 11. CABALLITOS DE MAR. GRUPO P2

ELEMENTOS DE SIMETRÍA

Solo tiene centros de rotación de orden 2 (giro de 180º).

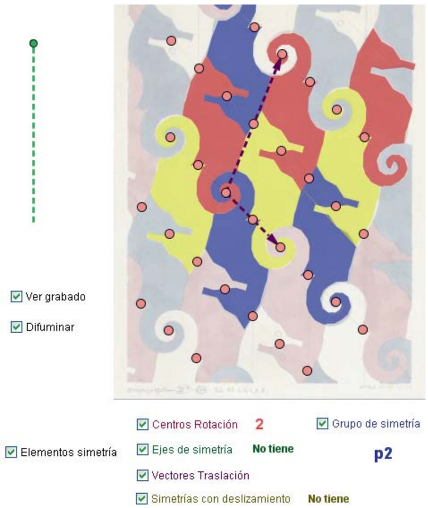
La baldosa mínima es un rombo. Como los centros de rotación están situados sobre los vértices y sobre los puntos medios de dos de sus lados opuestos, utilizaremos los centros que están sobre los lados para hacer que cualquier transformación sobre ellos se vea transformada también por la rotación de 180º.

Las transformaciones en los otros dos lados se llevan al opuesto mediante traslaciones.

CONSTRUCCIÓN DEL MOSAICO

Los primeros caballitos se construyen por rotación de 180º.

Cuando ya se tiene una fila de caballitos, se construyen dos filas más, una por rotación de la primera y otra por traslación.



MOSAICO ESCHER 25. REPTILES. GRUPO P3

ELEMENTOS DE SIMETRÍA

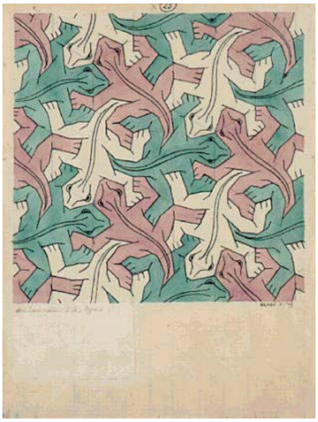
Solo tiene centros de rotación de orden 3 (giro de 120º) y vectores de traslación que forman un ángulo de 60º.

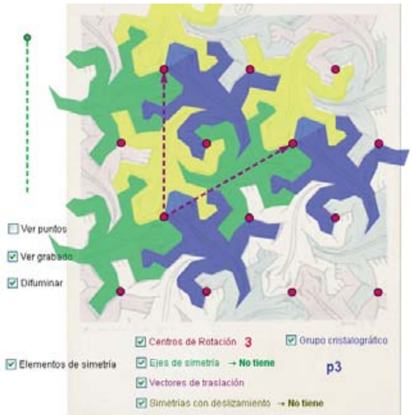
La baldosa mínima es un hexágono. Los centros de rotación están situados sobre vértices alternos del hexágono.

Haremos transformaciones en tres de los lados y utilizaremos esos centros de rotación para llevar la línea que deforma un lado, al contiguo.

CONSTRUCCIÓN DEL MOSAICO

En primer lugar, utilizamos el centro de rotación para completar los tres reptiles alrededor de un centro de rotación con ángulos de 120º y 240º. Una vez formado un primer trío, continuamos el mosaico con los dos vectores de traslación.



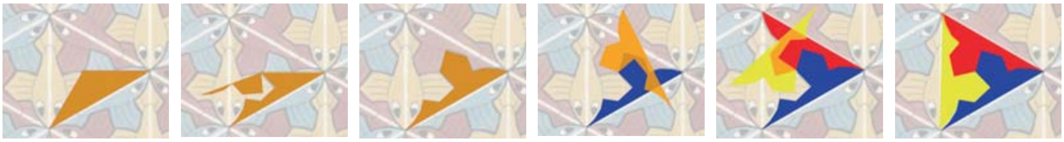


MOSAICO ESCHER 123. PECES VOLADORES. GRUPO P31M

ELEMENTOS DE SIMETRÍA

El esquema de elementos de simetría se parece mucho a p3m1; la diferencia se encuentra en la simetría rotacional: este grupo, además de tener centros de rotación de orden 3 en los vértices de los triángulos que forman los ejes de simetría, también los tiene en los centros de esos triángulos. Esto obliga a que las tres figuras del interior del triángulo tengan la misma forma.

La baldosa mínima es un triángulo isósceles que se obtiene al tomar uno de los triángulos de la trama de ejes de simetría y unir su centro con los vértices. En este caso, su interior se divide en tres partes iguales (según un centro de rotación de orden 3), cada una de ellas es la mitad de uno de los peces voladores.

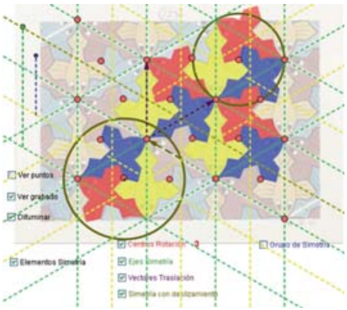


CONSTRUCCIÓN DEL MOSAICO

El primer paso es construir las tres mitades de los peces a partir de una de ellas utilizando el centro de rotación. Después, componemos los tres peces voladores completos mediante las simetrías axiales respecto de los ejes que pasan por los lados del triángulo.

En el siguiente, se utilizan dos vectores de traslación independientes para formar dos nuevos grupos de tres peces.

Cuando el deslizador verde llega a la parte superior, aparece otro nuevo de color azul junto al anterior, con el objetivo de mostrar el efecto de la simetría con deslizamiento en este mosaico. Se señala con un círculo uno de los grupos de tres peces voladores y su simétrico respecto de una de las rectas coloreadas de amarillo. Después, vemos cómo ese grupo reflejado se desliza hasta llegar a su posición dentro del mosaico.



MOSAICO LA ALHAMBRA. ROMBOS. GRUPO P4M

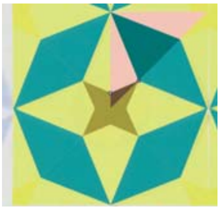
ELEMENTOS DE SIMETRÍA

Los ejes de simetría se cortan en ángulos de 45º formando un entramado de triángulos rectángulos. En los vértices de la trama donde se cortan cuatro ejes de simetría, están los centros de rotación de orden 4, y en los que se cortan dos ejes, el centro de rotación es de orden 2.

No hay ejes de simetría con deslizamiento.

La baldosa mínima es un triángulo rectángulo e isósceles (la octava parte de un cuadrado de la trama de ejes de simetría), que se descompone en tres triángulos.

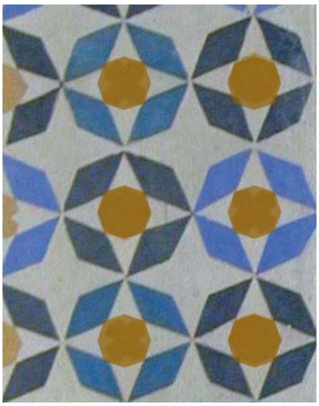
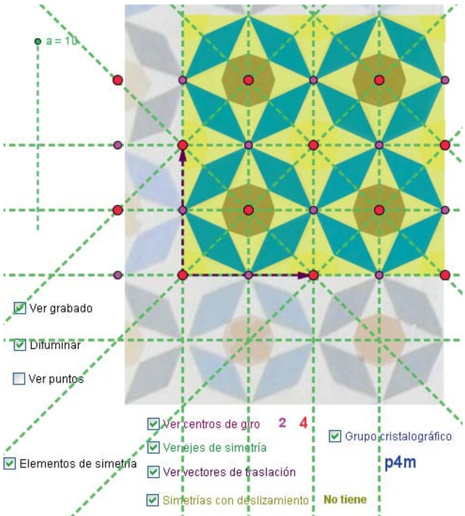

Cuando llevamos el deslizador verde que hay a la izquierda hasta el extremo superior, aparece un nuevo interruptor. Al pulsarlo, podemos ver los puntos iniciales que conforman los tres triángulos interiores de la baldosa mínima. Podemos ahora modificar esos triángulos y hacer que el mosaico completo se transforme: rombos, octógonos y estrellas.


CONSTRUCCIÓN DEL MOSAICO

Para completar la baldosa cuadrada, primero se hace la simetría axial respecto de uno de los catetos; después, simetrías de esos triángulos respecto de los otros catetos hasta formar uno de los rombos. Seguimos con simetrías axiales hasta formar una baldosa mayor compuesta por una estrella de cuatro puntas y cuatro rombos.

La segunda baldosa se consigue por traslación; la tercera, por rotación alrededor de una de las rotaciones de orden 2, y la cuarta, por simetría axial.

MOSAICO ESCHER 12. MARIPOSAS. GRUPO P4G

ELEMENTOS DE SIMETRÍA

Tanto los ejes de simetría, como los de simetría con deslizamiento, forman tramas cuadradas que se intercalan.

Los centros de rotación de orden 2 se encuentran en las intersecciones de los ejes de simetría. Los de orden 4 en las intersecciones de los ejes de simetría con deslizamiento.

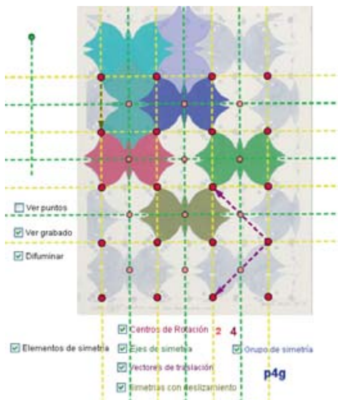
La baldosa mínima es un cuadrado. Deformamos uno de los lados y lo llevamos al lado contiguo con una rotación de 90º alrededor del vértice común.

Conseguimos el resto de la mariposa por simetrías axiales respecto de los lados del cuadrado no deformados.

CONSTRUCCIÓN DEL MOSAICO

Una vez completada la primera mariposa, las siguientes se consiguen de la siguiente manera:

- 2.ª: Rotación de 180º.
- 3.ª: Simetría con deslizamiento.
- 4.ª: Traslación.
- 5.ª a 8ª: Rotaciones de 90º, 180º y 270º alrededor de un centro de orden 4.

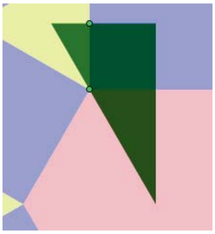
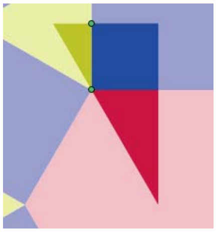


MOSAICO SEMIRREGULAR 6,4,3,4. GRUPO P6M

ELEMENTOS DE SIMETRÍA

- Los ejes de simetría pasan por los centros de los hexágonos y los triángulos.
- Los ejes de simetría con deslizamiento pasan por los centros de los cuadrados.
- Los centros de rotación de orden 6 están situados en los centros de los hexágonos; los de orden 2, en los centros de los cuadrados, y los de orden 3, en los baricentros de los triángulos equiláteros.
- También hay vectores de traslación que unen los centros de los hexágonos.

La baldosa mínima es un triángulo rectángulo compuesto por 1/12 de hexágono, 1/4 de cuadrado y 1/6 de triángulo equilátero.

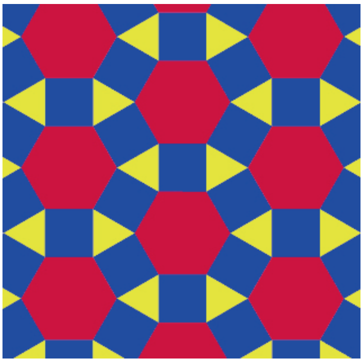
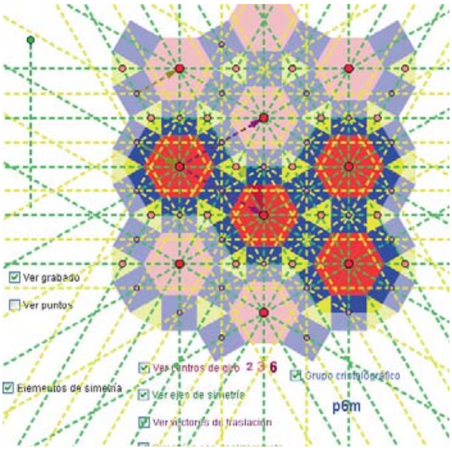
CONSTRUCCIÓN DEL MOSAICO

Con una simetría axial respecto del cateto mayor construimos un triángulo equilátero.

Cinco rotaciones de 60º alrededor de un centro de rotación de orden 6 darán lugar a un hexágono regular.

Traslaciones en dos direcciones no paralelas.

Por último, simetría axial respecto de uno de los lados del hexágono.

BIBLIOGRAFÍA

BOSSARD, Y. (1977): *Rosaces, frises et pavages* (2 vols.). CEDIC, París.

COLLONGE, M., y TREHARD, F. (1982): *Mosaiques et isometries*. CEDIC, París.

EPSILON, (Revista) (1987) *La Alhambra*, APMA, Granada.

ERNST, B. (1989): *El espejo mágico de M.C. Escher.* Taco, Berlín.

ESCHER, M.C. (1989): *Escher on Escher. Exploring the infinite.* Abrams, Nueva York.

ESTALL I POLES, V. (2000): *Catálogo de la colección de azulejos de serie del siglo XIX del Museo del Azulejo de Onda.* Faenza, Castellón.

FIELKER, D. (1987): *Rompiendo las cadenas de Euclides.* MEC, Madrid.

GRABBAR, O. (1988): *La formación del arte islámico*. Cátedra, Madrid.

LIVIO, M. *La proporción áurea. La historia de phi, el número más sorprendente del mundo*. Ariel, Barcelona.

LOCHER, J.L. (1971): *The Word of M.C. Escher*. Abradale, Nueva York.

MCGUILLAVRY, M.C. (1976): *Fantasy & Symmetry. The Periodic Drawings of M.C. Escher.* Abrams, Nueva York.

MORA, J.A., y RODRIGO, J. (1993): *Mosaicos* (2 vol). Colección Dos Puntos, Proyecto Sur, Granada.

PALACIOS, D. (2007): *Enseñanza de la geometría a través del arte. Propuesta para promover un estudio integral*. Revista escolar de la O.I.M., O.E.I.

PÉREZ, R. (1987): *The Four Regular Mosaics Missing in the Alhambra*. Comput. Math. Applic, vol. 14, n.º 2, págs. 133-137.

PÉREZ, R. (2004): *Un matemático pasea por la Alhambra.* Semana Europea para la Ciencia y la Tecnología 2004, págs. 31-48. Física en Acción

RANUCCI, E.R. y TEETERS J.L. (1979): *Creating Escher-type drawings,* Creative Publications, Palo Alto.

PÁGINAS DE INTERNET

MOSAICOS

- Mosaicos y grupos cristalográficos.
  http://www.iescomercio.com/cursos/Russell_en_%20Atenas/Russell_en_%20Atenas.htm
- IES Arroyo de la Miel de Málaga. Movimientos en el plano y mosaicos.
  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/movimientos.html
- Tilings from historical sources. http://www.spsu.edu/math/tile/grammar/index.htm

MOSAICOS DE ESCHER

- Escher. http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/Escher/escher.htm
- Totally tessellated. http://library.thinkquest.org/16661/escher/tessellations.2.html
- M.C. Escher at Riverdale High School. http://hs.riverdale.k12.or.us/escher/links.html

GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

- Wikipedia. Wallpaper groups. http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group
- Computer Art by Hans Kuiper. 17 Wall Paper Symmetry Groups to Create a Regular Division of the Plane. http://web.inter.nl.net/hcc/Hans.Kuiper/17system.htm
- David E. Joyce. Wallpaper groups. http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/seventeen.html

CONSTRUCCIÓN DE MOSAICOS EN RED Y SOFTWARE

- Kaleidomania. http://www.keypress.com/x6173.xml
- Kali. http://www.scienceu.com/geometry/handson/kali/kali.html
- Tesselmania. http://www.tessellations.org/tesselmania0.htm
- Tile Machine. http://www.tilemachine.com/tilemachine.html

APÉNDICE. MOSAICOS DE M.C. ESCHER